MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jan Sedlák

Přirozený výklad komplexních čísel

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Učitelství matematiky - Učitelství deskriptivní geometrie

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Rád bych poděkoval všem, kteří mi pomohli při tvorbě práce. Především děkuji mému vedoucímu Mgr. Lukáši Krumpovi, Ph.D. za trpělivost a za veškerou pomoc, kterou mi při psaní práce poskytl.

Název práce: Přirozený výklad komplexních čísel

Autor: Jan Sedlák

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: Práce se věnuje zavedení oboru komplexních čísel. Tato látka je mnohdy žáky i studenty vnímána jako velmi obtížná a špatně představitelná. Často je zastřena přehnanou formálností, které se věnuje více času než názornému geometrickému pojetí komplexních čísel. V konečném důsledku jsou následně zanedbány důležité výsledky, kterých bylo pomocí komplexních čísel dosaženo na poli matematiky. Práce je zaměřena na názorné geometrické pojetí oboru komplexních čísel, které usnadní pochopení navazující vysokoškolské látky. Text je určen čtenářům vyšších stupňů gymnázií a prvních ročníků vysokých škol. Součástí práce jsou také příklady, aby vznikl ucelený text užitečný k výuce i k samostudiu.

Klíčová slova: Komplexní čísla, exponenciální funkce, komplexní sdružení, kvadratická rovnice, binomická rovnice, základní věta algebry, Eulerův vzorec

Title: A natural explanation of complex numbers

Author: Jan Sedlák

Department: Didactics of mathematics

Supervisor: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: The thesis is concerned with the introduction of complex numbers. This topic is often perceived by pupils and students as very mysterious. This is often due to excessive formality, to which more time is devoted than to the illustrative geometrical concept of complex numbers. As a result, the important theorems achieved by complex numbers in the field of mathematics are consequently skipped. This thesis focuses on an illustrative geometric view on the field of complex numbers that will facilitate the understanding of related undergraduate curriculum. The text is written for readers at the upper grades of high school and first years of college. Examples are also included to create a coherent text useful for teaching and self-study.

Keywords: Complex numbers, exponential function, complex conjugate, quadratic equation, binomial equation, fundamental theorem of algebra, Euler's identity

Obsah

1 Úvod **2**

2 Čísla **3**

2.1 Rozšiřování číselných oborů . . . 3

2.1.1 Přirozená a celá čísla . . . 3

2.1.2 Obor reálných a komplexních čísel . . . 5

2.2 Komplexní čísla . . . 10

2.2.1 Vlastnosti operací komplexních čísel . . . 12

2.2.2 Grafické znázornění komplexních čísel . . . 13

2.2.3 Komplexní sdružení . . . 18

3 Rovinná geometrie a komplexní čísla **23**

3.1 Obsahy n-úhelníků . . . 23

3.1.1 Obsah trojúhelníku . . . 23

3.1.2 Obsahy mnohoúhelníků . . . 26

3.2 Pythagorejské trojice . . . 29

4 Mocniny, odmocniny a rovnice **32**

4.1 Mocniny komplexních čísel . . . 32

4.2 Rovnice . . . 34

4.2.1 Binomické rovnice . . . 34

4.2.2 Kvadratická rovnice . . . 37

4.2.3 Kubická rovnice a historie komplexních čísel . . . 38

4.2.4 Goniometrická substituce při řešení kubické rovnice . . . 40

4.3 Základní věta algebry . . . 43

4.3.1 Obecné polynomy . . . 44

5 Exponenciální funkce **48**

5.1 Eulerův vzorec . . . 48

5.2 Geometrický význam imaginární mocniny . . . 51

5.3 Zavedení exponenciální funkce . . . 53

5.3.1 Součet geometrické řady . . . 53

5.3.2 Definice exponenciální funkce . . . 55

Závěr **58**

Seznam použité literatury **59**

Seznam obrázků **60**

1. Úvod

Obor komplexních čísel je jednou z nejabstraktnějších oblastí matematiky, která se probírá na středních školách. I z toho důvodu dělá žákům mnohdy velké potíže. Naneštěstí se na střední škole často probere pouze základní aritmetika, a přechod k vysokoškolské látce je pak problematický. Současná literatura týkající se komplexních čísel je buď striktně středoškolská, anebo předpokládá znalost středoškolské látky, na kterou navazuje. Gymnaziální učebnice nenabízejí zdůvodnění složitějších poznatků, a ty se tak stávají pouze suchým výkladem, který si žáci musejí zapamatovat. Zejména jde o zavedení odmocniny, exponenciální tvar komplexních čísel, základní větu algebry a mnohá další tvrzení. Dalším problémem současných textů je nejasná motivace k zavedení nového číselného oboru, čímž se látka stává ještě méně srozumitelnou.

Cílem této práce je propojit středoškolské poznatky s vysokoškolskými. Text je určen čtenářům vyšších ročníků gymnázií a prvních ročníků vysokých škol. Při výkladu je kladen důraz na geometrickou interpretaci komplexních čísel a na souvislosti s hlubšími poznatky z algebry a matematické analýzy. Součástí práce jsou i řešené příklady, čímž vzniká ucelený text, užitečný k výuce i k samostudiu.

V druhé kapitole zavádíme obor komplexních čísel a zároveň odvozujeme ekvivalenci mezi geometrickým znázorněním komplexních čísel a algebraickou definicí, což umožní plynulý přechod ke třetí kapitole, která ukazuje zajímavé příklady týkající se rovinné geometrie. Mimo jiné si ukážeme vzorec pro výpočet obsahu libovolného konvexního $n-$úhelníku.

Čtvrtá kapitola je věnována mocninám, odmocninám, a především rovnicím. Kromě binomických a kvadratických rovnic je ve této kapitole krátká zmínka o kubických rovnicích a o historii komplexních čísel. Poslední částí čtvrté kapitoly je demonstrace základní věty algebry.

Pátá kapitola se zabývá zavedením exponenciální funkce komplexní proměnné. Tato funkce je naprosto klíčová pro další studium matematické analýzy. Cílem této kapitoly je vysvětlit důležité vlastnosti exponenciální funkce a také zdůvodnit její zavedení. Oproti předešlým kapitolám vyžaduje pátá kapitola hlubší předběžné znalosti matematiky, zejména se jedná o základy konvergence řad a limity. Kapitola začíná odvozením Eulerova vzorce, pokračuje grafickým znázorněním exponenciální funkce komplexní proměnné a jejím vztahem ke goniometrickým funkcím. Kapitola je zakončena definicí goniometrických funkcí s grafickým znázorněním.

Při psaní práce jsem často hledal inspiraci v již napsaných studijních textech, ze kterých jsem čerpal formulace definic a vět tak, aby to odpovídalo středoškolským znalostem. Zejména se jedná o [1], [2], [3] a [4]. Poslední kapitola čerpá základy z [5] a je částečně inspirována knihou [6].

Práce byla vytvořena v programu TEXstudio s využitím šablony. Obrázky, které doprovází výklad, byly z větší části vytvořeny v programu GeoGebra, složitější obrázky jsem zhotovil v programech Mathematica a Octave.

2. Čísla

Pro matematiky jsou čísla primitivním pojmem.[1] Přestože pojem číslo považujeme za obecně srozumitelný, není na škodu o něm krátce pohovořit, než začneme s výkladem nové látky. Na počátku věků, když se rodil jazyk, nebylo potřeba jiných než přirozených čísel. Lidé si pravděpodobně vystačili pouze s čísly 1, 2, 3, 4, a žádná jiná čísla nebyla potřeba[2]. S vývojem lidské civilizace se vyvíjely i číselné obory. Lidé využívali čísla jako nástroj. Postupem času bylo potřeba více přirozených čísel. Ukázalo se, že je užitečné počítat se zlomky, vyjadřovat části celku či poměry. Tím se začala rozvíjet i racionální čísla. Už ve starověkém Řecku filosofové zjistili, že při řešení geometrických problémů je třeba uvažovat i čísla iracionální. To se ukázalo při vyjádření délky uhlopříčky čtverce o straně délky jedna. Výsledkem je $\sqrt{2}$, číslo, které nemůže být vyjádřeno zlomkem. Až o mnoho staletí později, ve středověku, se v naší civilizaci začalo používat číslo 0. Číselné obory se rozšiřovaly a představovaly stále dokonalejší nástroj pro řešení problémů. Čísla se pomalu ale jistě stávala abstraktnější a abstraktnější. Ve středověku a novověku matematici začali používat záporná čísla, i když je sami považovali mnohdy za nesmyslná. Teprve v osmnáctém století je matematici přijali mezi plnohodnotná čísla. V dnešní době je pro nás práce se zápornými čísly naprosto přirozená. Dovolím si tvrdit, že je to do jisté míry zásluhou Celsiovy stupnice pro měření teploty. V matematice je využijeme při kreslení grafů a při používání souřadnicových systémů. Díky těmto a mnohým dalším aplikacím dnes považujeme záporná čísla za užitečná a nepostradatelná.

Ve středověku a novověku došlo ještě k dalšímu rozvinutí číselných oborů. Při řešení polynomiálních rovnic matematici narazili na takzvaná komplexní čísla, která se plně rozvinula společně s čísly zápornými. Na rozdíl od záporných čísel jsou komplexní čísla užitečná při složitějších úvahách a výpočtech, proto i v současné době je většina společnosti vůbec nezná. K čemu taková čísla jsou? A jak si je představit? To si krátce rozebereme v této kapitole.

Velmi jednoduchý a přirozený způsob, jak rozšiřovat číselné obory, je skrze jejich geometrický význam. Tento postup nám zajistí poměrně intuitivní zavedení oboru komplexních čísel.

2.1 Rozšiřování číselných oborů

V této kapitole nám půjde především o rozšíření oboru reálných čísel na obor komplexních čísel. Aby tento proces působil co nejpřirozeněji, začneme s daleko jednoduššími objekty. Zopakujeme si, jakým způsobem jsme obor přirozených čísel rozšířili na obor čísel celých.

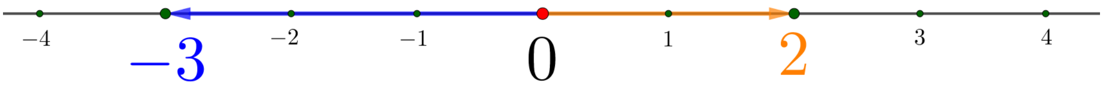
2.1.1 Přirozená a celá čísla

Ukážeme si, jak rozšířit obor přirozených čísel na obor celých čísel na základě geometrického znázornění. Jádrem tohoto rozšiřujícího procesu je přidání čísla

[1] Jde o pojmy, které není třeba definovat. Předpokládá se, že takové pojmy jsou intuitivně srozumitelné. Dalším primitivním pojmem je například bod.

[2] To se předpokládá na základě studia jazyků amazonských kmenů[7].

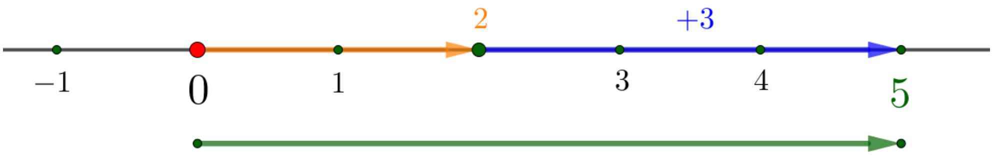
-1 a jeho násobků, které budeme nazývat zápornými čísly. Graficky si můžeme číslo -1 představit jako rotaci kolem počátku o 180°, proto všechny násobky čísla -1 znázorníme na opačné straně od 0. Každé přirozené i záporné číslo můžeme znázornit na číselné ose jako orientovanou úsečku dané délky. Onou danou délkou je myšlena absolutní hodnota čísla.



Obrázek 2.1: Znázornění celých čísel orientovanými úsečkami

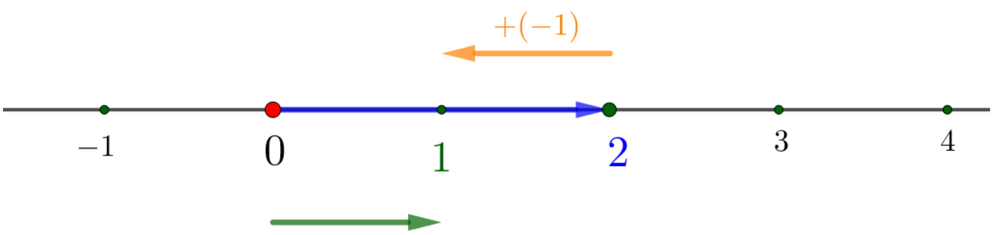
Aby toto rozšíření bylo korektní, musíme zajistit, aby operace sčítání a násobení, které jsme znali u čísel přirozených, byly stále smysluplné. Naším cílem je rozšíření těchto operací i na záporná čísla.

Sčítání celých čísel



Obrázek 2.2: $2 + 3 = 5$

Sčítání přirozených čísel umíme jednoduše znázornit pomocí orientovaných úseček. Oba sčítance znázorníme jako orientované úsečky a následně jednu orientovanou úsečku naneseme za druhou (*v libovolném pořadí*[3]) Výsledkem je číslo, ke kterému směřuje orientovaná úsečka druhého sčítance. Takto popsané sčítání snadno rozšíříme na celá čísla, jak ukazuje následující obrázek 2.3.

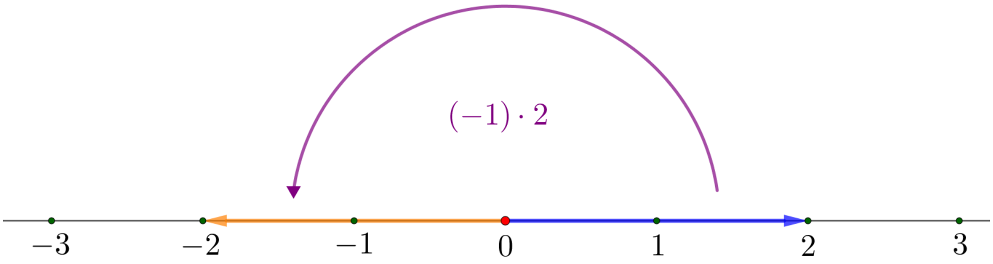


Obrázek 2.3: $2 + (-1) = 1$

[3]Této vlastnosti se říká *komutativita*.

Násobení celých čísel

Násobení celých nenulových čísel rozdělme na tři různé případy. Buď násobíme dvě kladná čísla, dvě záporná čísla, nebo kladné číslo se záporným. Dvě kladná čísla vynásobit umíme, jediná nejistota se týká násobení číslem záporným. Budeme-li chápat násobení číslem -1 jako rotaci o $180°$ kolem počátku, vše bude fungovat tak, jak jsme zvyklí.



Obrázek 2.4: $(-1) \cdot 2 = -2$

Vynásobíme-li kladné číslo záporným, dostaneme záporné číslo, vynásobíme-li dvě záporná čísla, dostaneme kladné číslo, což přesně odpovídá našemu znázornění celých čísel pomocí rotace. Násobení záporným číslem znázorníme jako rotaci o $180°$ složenou se stejnolehlostí (stejnolehlost je dána středem v počátkem a koeficientem, který odpovídá absolutní hodnotě čísla). Násobení kladným číslem odpovídá stejnolehlosti (složené s rotací o $0°$). Postupné vynásobení dvěma celými čísly odpovídá složení příslušných rotací a stejnolehlostí.

Došli jsme k velmi důležitému poznatku: násobení číslem -1 vzájemně jednoznačně odpovídá rotaci o $180°$. Matematicky takovou vzájemnou jednoznačnost nazýváme homomorfismus. Nyní si ukážeme, že podobnou úvahou můžeme rozšířit i obor reálných čísel.

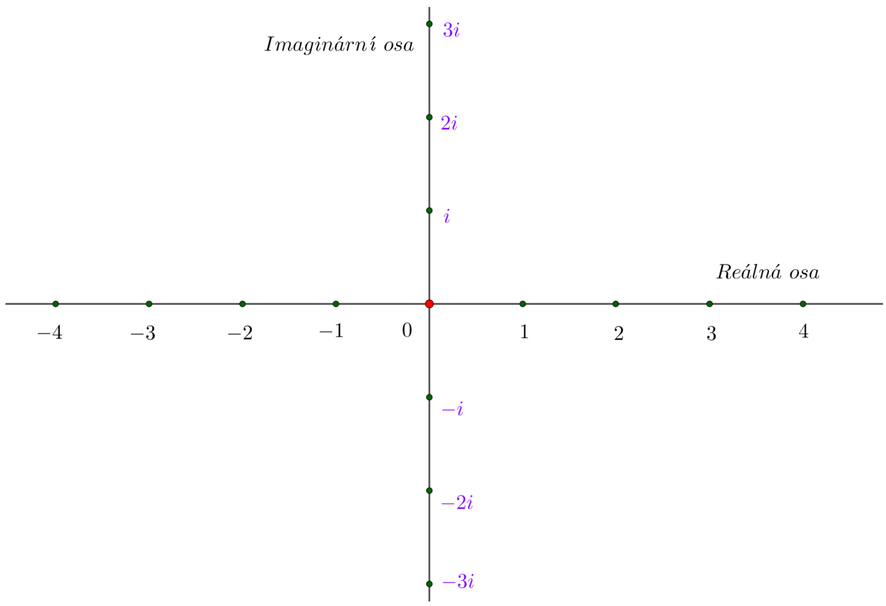
2.1.2 Obor reálných a komplexních čísel

Pro rozšíření oboru přirozených čísel na obor celých čísel stačilo přidat číslo -1 a následně vymyslet, jak budou fungovat operace sčítání a násobení. V této kapitole podobným procesem rozšíříme i obor čísel reálných.

V devatenáctém století matematici ukázali, že na číselné ose nenalezneme jiná než reálná čísla, proto jsme nuceni nová čísla hledat někde mimo tuto osu[4]. Tím významným prvkem, který tentokrát přidáme k reálným číslům, bude číslo s označením i, které znázorníme jako rotaci o $90°$ v kladném smyslu, tedy proti směru pohybu hodinových ručiček, podobně jako číslo -1 při znázornění na číselné ose reprezentovalo rotaci o $180°$.

Začněme tím, že si znázorníme všechny možné násobky čísla i. Vynásobíme-li každé číslo na reálné ose číslem i, dostaneme ihned druhou osu, na které budou pouze násobky čísla i. Tuto druhou osu, která vznikla otočením reálné osy o $90°$, nazveme *osou imaginární*.

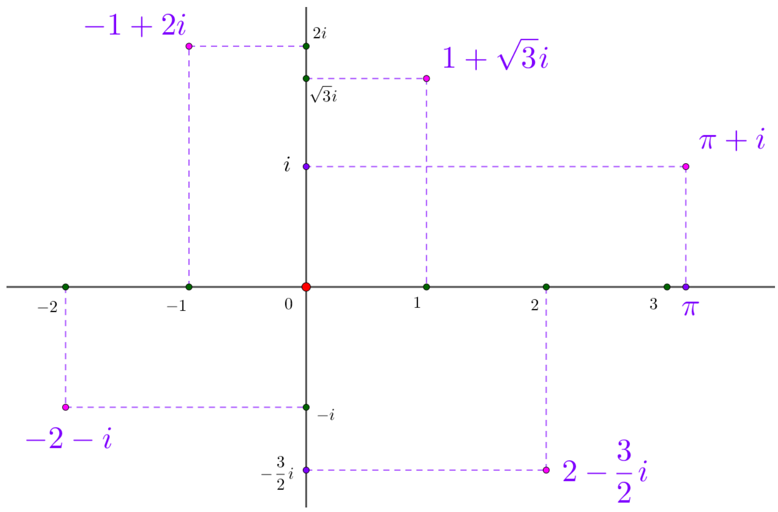
[4]Matematik, který ukázal úplnost reálné osy, byl Richard Dedekind (1831-1916)



Obrázek 2.5: Reálná a imaginární osa

Sčítání komplexních čísel

Opět si můžeme jednotlivá čísla představovat jako orientované úsečky, které vycházejí z počátku. Na obou osách můžeme čísla sčítat tak, jak jsme byli zvyklí u čísel reálných. Co se ale stane, sečteme-li například číslo $2i$ s číslem 3? Čísla budeme sčítat jako vektory. Součtem čísel $2i$ a 3 bude výraz $3+2i$, který nazveme číslem komplexním. Proto musíme do našich úvah krom násobků čísla i přidat také všechna čísla ve tvaru $a + bi$, abychom součtem dvou komplexních čísel dostali opět číslo komplexní[5]. To zajistí, že komplexními čísly můžeme vyplnit celou rovinu. Reálné číslo 0 budeme považovat zároveň za číslo komplexní ve tvaru $0 + 0i$. Rovina komplexních čísel se nazývá *Gaussova*[6] rovina.

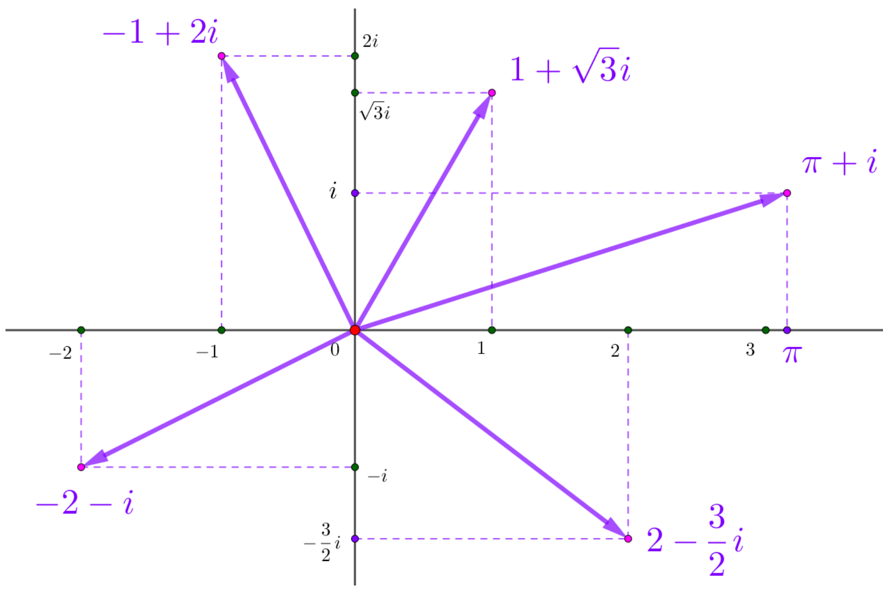


Obrázek 2.6: Komplexní čísla

[5] Tím zajistíme takzvanou uzavřenost oboru komplexních čísel vzhledem ke sčítání

[6] Někdy je také označována jako *Argandova rovina* či *Gaussova – Argandova rovina*

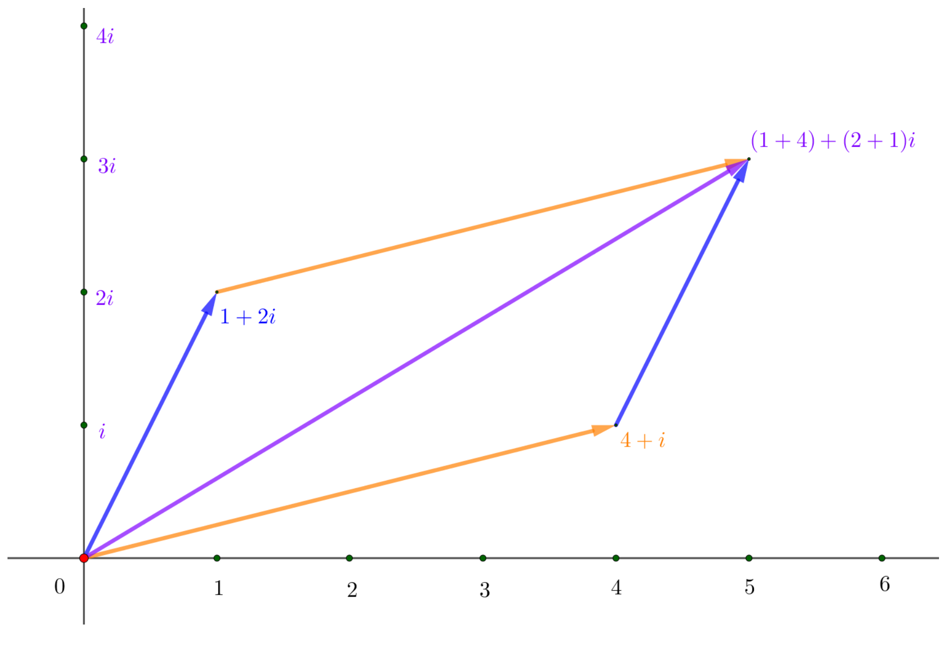
Každému z těchto čísel můžeme přiřadit polohový vektor, který ho bude reprezentovat. To je znázorněno na obrázku 2.7.



Obrázek 2.7: Komplexní čísla jako polohové vektory

Součet dvou libovolných komplexních čísel pak budeme znázorňovat jako součet dvou vektorů pomocí rovnoběžníkového pravidla. Jinými slovy komplexní čísla budeme sčítat tak, že sečteme zvlášť reálné a zvlášť imaginární složky tak, jako by se jednalo o souřadnice vektorů, což v obecném zápise můžeme zapsat takto:

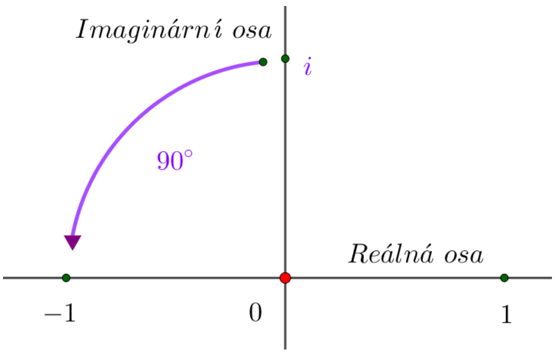
$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \tag{2.1}$$



Obrázek 2.8: Součet komplexních čísel dle rovnoběžníkového pravidla

Násobení komplexních čísel

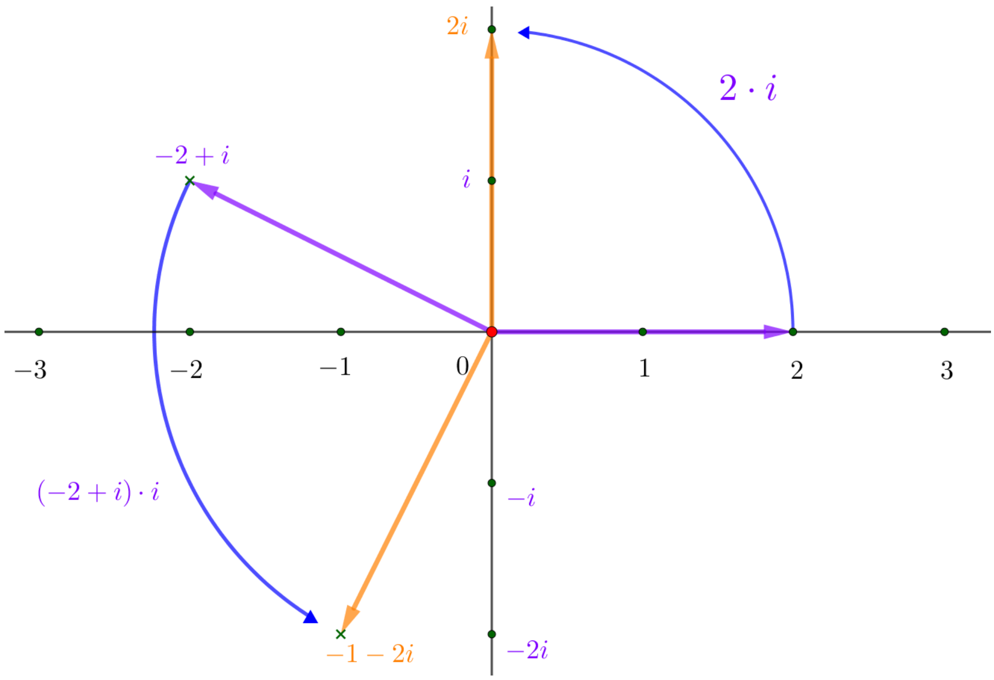
Poté, co jsme si znázornili sčítání komplexních čísel, přijde poněkud složitější násobení. Pro začátek se zaměříme na násobení komplexním číslem i. Zatím jsme řekli, že toto číslo reprezentuje rotaci o 90°, a právě tato vlastnost bude pro nás klíčová. Vynásobíme-li číslo i samo se sebou, pak výsledkem bude číslo -1, což odpovídá tomu, že jsme složili dvě rotace o 90°, jak znázorňuje obrázek 2.9. Přesněji bychom řekli, že jsme obraz čísla i otočili o 90°, ale dovolíme si zde i v některých dalších úvahách používat tuto sice zjednodušenou, ale srozumitelnou terminologii. Z této úvahy vyplývá následující rovnost.



Obrázek 2.9: Součin $i^2 = -1$

$$i \cdot i = i^2 = -1 \tag{2.2}$$

Tato rovnost může na první pohled působit poněkud překvapivě, nicméně mějme na paměti, že se nejedná o číslo reálné, a tak není důvod, aby tato rovnost byla v rozporu s tím, co jsme doposud znali. Při dalších úvahách se budeme k výrazům $a + bi$ chovat stejně, jako by se jednalo o dvojčleny.



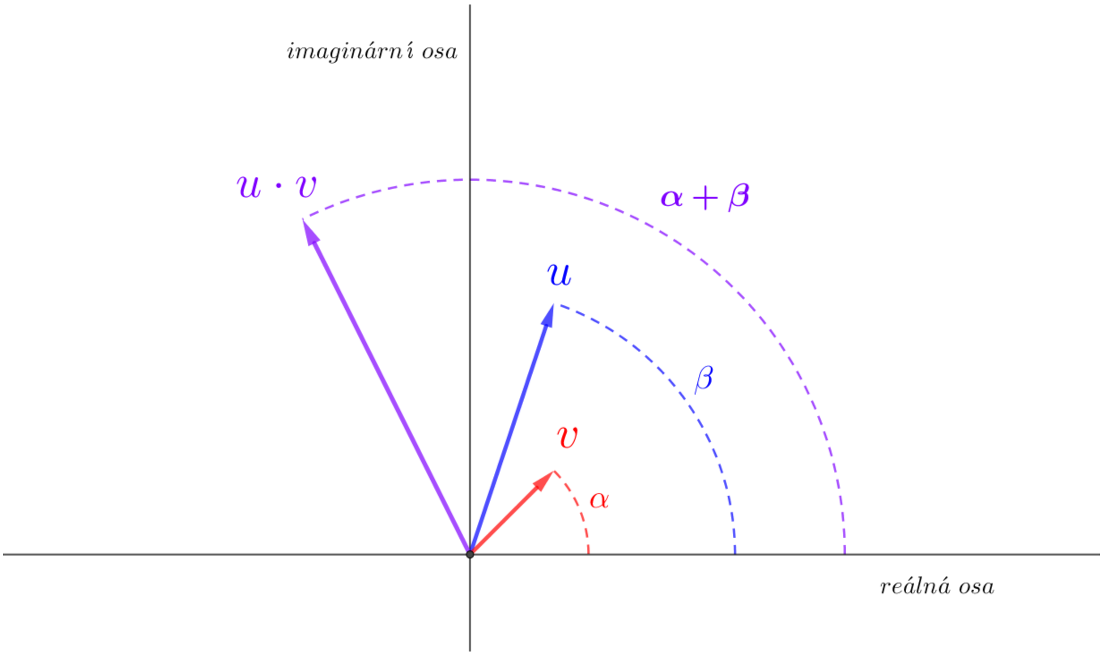
Obrázek 2.10: Součin komplexního čísla s číslem i

Na obrázku 2.10 jsou znázorněné dva součiny. Obecně je zapíšeme následovně:

$$(a + bi) \cdot i = ai + bi \cdot i = ai + bi^2 = -b + ai \tag{2.3}$$

Všimněte si, že součin 2.3, přesně odpovídá tomu, jak se počítají normálové vektory. To znamená prohodit složky vektoru a změnit znaménko vektoru u první souřadnice. Normálový vektor vznikne také změnou znaménka v druhé souřadnici, to by ale odpovídalo rotaci o $-90°$.

Obecně můžeme součin každých dvou nenulových komplexních čísel znázornit pomocí rotace složené se stejnolehlostí, jak je ukázáno na obrázku 2.11. Vektor, který odpovídá součinu, má velikost, která je určena součinem velikostí vektorů u a v. Dále ukážeme, že se komplexní čísla skutečně chovají tímto způsobem, ale nejdříve si vše definujme algebraicky. To znamená, že formálně zavedeme obor komplexních čísel.



Obrázek 2.11: Součin komplexních čísel

Klíčovou znalostí je vzájemná jednoznačnost mezi násobením komplexních čísel a rotací se stejnolehlostí, zároveň jednoznačnost mezi sčítáním komplexních čísel a sčítáním vektorů.

Ještě než přejdeme k formálnímu zavedení oboru komplexních čísel, je důležité zmínit, že stejně jako reálná osa je pouze obrazem reálných čísel, tedy jakýmsi znázorněním, tak i Gaussova rovina je jen obrazem komplexních čísel. Samotná čísla jsou abstraktními objekty, které jsou provázány aritmetickými pravidly, která je třeba řádně definovat.

2.2 Komplexní čísla

V předchozím textu jsme si řekli, jakým způsobem bychom mohli rozšířit obor reálných čísel. Nyní si obor komplexních čísel formálně definujeme. Tuto definici provedeme ve třech krocích, v prvním kroku definujeme prvky oboru (tj. komplexní čísla), ve druhém kroku jejich sčítání a ve třetím jejich násobení.

Definice 1 (Komplexní číslo v algebraickém tvaru)**.** *Nechť a, b jsou reálná čísla a nechť i označuje nějaký prvek, který není reálným číslem (jeho vlastnosti upřesníme v třetí části definice). Pak výraz $a + bi$ se nazývá komplexním číslem v algebraickém tvaru. Označíme-li toto komplexní číslo z, potom se číslo a nazývá reálnou složkou komplexního čísla z, číslo b se nazývá imaginární složkou komplexního čísla z. Symbolicky píšeme*

$$\mathrm{Re}(z) = a \qquad \mathrm{Im}(z) = b$$

Rovnost komplexních čísel nastává právě tehdy, když se rovnají jejich reálné i imaginární složky.

$$z_1 = z_2 \iff \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \;\wedge\; \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \tag{2.4}$$

Řekneme, že komplexní číslo je nulové, pokud jeho reálná i imaginární složka je rovna nule.

$$z \text{ je nulové} \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \;\wedge\; \mathrm{Im}(z) = 0 \tag{2.5}$$

Reálná čísla ztotožňujeme s komplexními čísly s nulovou imaginární složkou.

$$a = a + 0i \tag{2.6}$$

Definice 2 (Sčítání komplexních čísel)**.** *Jsou-li $a+bi, c+di$ dvě komplexní čísla, definujeme jejich součet jako:*

$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i, \tag{2.7}$$

Sčítání jsme tedy definovali tak, aby odpovídalo naší geometrické představě sčítání vektorů 2.1.

Definice 3 (Násobení komplexních čísel)**.** *Jsou-li $a + bi, c + di$ dvě komplexní čísla, definujeme jejich součin jako:*

$$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac + bdi^2) + (bci + adi) = (ac - bd) + (bc + ad)i \tag{2.8}$$

Násobení jsme tedy definovali tak, jako bychom obvyklým způsobem násobili algebraické dvojčleny, přičemž $i^2 = -1$. Z toho ihned plyne, že i nemůže být reálné číslo, nazývá se *imaginárníjednotka*. Součet i součin komplexních čísel jsou opět komplexními čísly, neboť výsledkem je vždy výraz ve tvaru $a + bi$. Množinu všech komplexních čísel s výše definovanými operacemi sčítání a násobení budeme značit $\mathbb{C}$ a nazývat oborem komplexních čísel.

Příklad 1. *Vypočítejte součin komplexních čísel $3 + 4i$ a $2 - 3i$.*

$$\begin{aligned}(3 + 4i)(2 - 3i) &= 6 - 9i + 8i - 12i^2 = \\ &= 6 - i + 12 = \\ &= 18 - i\end{aligned}$$

Na základě operací sčítání a násobení můžeme zavést odčítání a dělení.

$$(a+bi)-(c+di) := (a-c)+(b-d)i, \tag{2.9}$$

Podíl dvou komplexních čísel bude o něco komplikovanější. Pro nenulové číslo $z = c+di$ definujme převrácené[7] komplexní číslo $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{c+di}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c+di} &:= \frac{1}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \\ &= \frac{c-di}{c^2 - cdi + cdi - i^2 d^2} = \\ &= \frac{c-di}{c^2+d^2} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Podíl komplexních čísel $a+bi$ a nenulového $c+di$ zavedeme takto:

$$\begin{aligned} \frac{a+bi}{c+di} &:= (a+bi) \cdot \frac{1}{c+di} = \\ &= (a+bi) \cdot \frac{c-di}{c^2+d^2} = \\ &= \frac{ac+bd-adi-bci}{c^2+d^2} = \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad-bc}{c^2+d^2} i \end{aligned} \tag{2.11}$$

Touto složitě vypadající úpravou opět dostáváme komplexní číslo ve tvaru $a+bi$. Podobnou úpravu již dobře známe z úprav výrazů s odmocninou ve jmenovateli, takzvané usměrňování zlomků.

Příklad 2. *Upravte výrazy* $\frac{2-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}}$, $\frac{2-i}{5+i}$ *tak, aby první jmenovatel neobsahoval* $\sqrt{2}$, *druhý jmenovatel neobsahoval* i.

Řešení.

$$\begin{aligned} \frac{2-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} &= \frac{2-\sqrt{2}}{5+\sqrt{2}} \cdot \frac{5-\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}} = \\ &= \frac{10-5\sqrt{2}-2\sqrt{2}+\sqrt{4}}{25-\sqrt{4}} = \\ &= \frac{12-7\sqrt{2}}{23} \end{aligned}$$

Podobně upravíme i podíl komplexních čísel

$$\begin{aligned} \frac{2-i}{5+i} &= \frac{2-i}{5+i} \cdot \frac{5-i}{5-i} = \\ &= \frac{10-5i-2i+i^2}{25-i^2} = \\ &= \frac{9-7i}{26} = \frac{9}{26} - \frac{7}{26} i \end{aligned}$$

[7]Někdy označované jako reciproké číslo.

V tuto chvíli máme definovaná komplexní čísla a operace s nimi, dále se zaměříme na vlastnosti těchto operací. Naším cílem je ukázat, že se komplexní čísla chovají tak, jak jsme si je v úvodu znázornili.

2.2.1 Vlastnosti operací komplexních čísel

Sčítání

Sčítání je definováno po složkách. Jelikož složky jsou reálná čísla, je zřejmé, že si sčítání komplexních čísel zachová vlastnosti, které známe u čísel reálných. Jmenovitě jde o

$$\forall z_1,\, z_2 \in \mathbb{C} \qquad z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad \text{(Komutativita)} \tag{2.12}$$
$$\forall z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C} \qquad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad \text{(Asociativita)} \tag{2.13}$$
$$\exists 0 \in \mathbb{C} \ : \forall z_1 \in \mathbb{C} \qquad z_1 + 0 = z_1 \qquad \text{(Neutrální prvek)} \tag{2.14}$$
$$\forall z_1 \in \mathbb{C} : \exists(-z_1) \in \mathbb{C} \qquad z_1 + (-z_1) = 0 \qquad \text{(0pačný prvek)} \tag{2.15}$$

Neutrálním prvkem pro sčítání je nula (0+0i), kterou jsme si už dříve zavedli. Existence tzv. opačného prvku je ekvivalentní operaci odčítání.

Násobení

Vlastnosti, na které jsme byli zvyklí při násobení reálných čísel, se v oboru celých čísel také zachovají.

$$\forall z_1,\, z_2 \in \mathbb{C} \qquad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \qquad \text{(Komutativita)} \tag{2.16}$$
$$\forall z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C} \qquad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \qquad \text{(Asociativita)} \tag{2.17}$$
$$\exists 1 \in \mathbb{C} \ : \forall z_1 \in \mathbb{C} \qquad z_1 \cdot 1 = z_1 \qquad \text{(Neutrální prvek)} \tag{2.18}$$
$$\forall z_1 \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \exists \frac{1}{z_1} \in \mathbb{C} \qquad z_1 \cdot \frac{1}{z_1} = 1 \qquad \text{(Inverzní prvek)} \tag{2.19}$$

Komutativita násobení plyne přímo z definice a z komutativity součinu reálných čísel. Existenci inverzního prvku jsme si již ukázali a existence neutrálního prvku 1 pro násobení je triviální. Na první pohled ale nemusí být zřejmé, zda funguje asociativita, proto ji ověříme výpočtem.

$$\begin{aligned}
(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= ((a + bi)(c + di))(e + fi) = \\
&= ((ac - bd) + (bc + ad)i)(e + fi) = \\
&= ((ac - bd)e - (ad + cb)f) + i((ac - bd)f + (ad + cb)e) = \\
&= (a(ce - df) - b(cf + ed)) + i(b(ce - df) + a(ed + cf)) = \\
&= (a + ib)((ce - df) + i(cf + ed)) = \\
&= z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)
\end{aligned}$$

Při ověření asociativity jsme využili dosud nedokázanou distributivitu násobení vzhledem ke sčítání, což je vlastnost, která propojuje tyto dvě operace.

$$\forall z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C} \qquad (z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 \qquad \text{(Distributivita)} \tag{2.20}$$

Ověření distributivity ponecháme jako samostatné cvičení čtenářům.

2.2.2 Grafické znázornění komplexních čísel

Nyní ukážeme, že grafické znázornění komplexních čísel je ekvivaletní algebraickému zápisu komplexních čísel.

V kartézské soustavě souřadnic můžeme každému komplexnímu číslu vzájemně jednoznačně přiřadit bod v rovině, neboť bod roviny i komplexní číslo jsou zadány pomocí dvojice čísel reálných.

$$a + bi \longmapsto [a,b]$$

Sčítání komplexních čísel po složkách jistě odpovídá grafickému sčítání vektorů. Všechny důležité vlastnosti sčítání komplexních čísel se zachovají, neboť sčítání vektorů je komutativní i asociativní. Opačný vektor bude fungovat jako obraz opačného komplexního čísla. Nule, neutrálnímu prvku, přiřadíme nulový vektor.

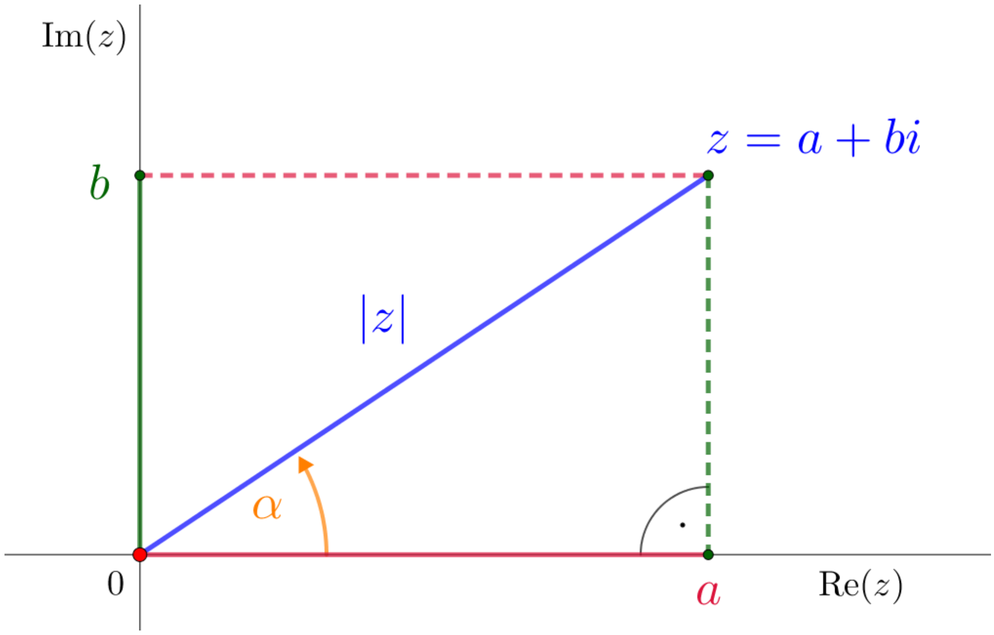
Nyní bychom chtěli ukázat, že bude funkční také grafické znázornění součinu komplexních čísel, jak je to ukázáno na obrázku 2.11. Jelikož budeme pracovat s úhly a vzdálenostmi bodů od počátku, je rozumné nejdříve přejít k polárním souřadnicím. Bod v rovině bude zadán pomocí orientovaného úhlu a vzdáleností od počátku. Pokud bychom chtěli vyjádřit vzdálenost reálného čísla od nuly, zřejmě nás napadne, že bychom to mohli zapsat pomocí absolutní hodnoty. Tento pojem nyní rozšíříme na komplexní čísla.

Definice 4 (Absolutní hodnota komplexního čísla, komplexní jednotka)**.** *Absolutní hodnota komplexního čísla $z = a + bi$, označována symbolem $|z|$, je reálné číslo definované vztahem*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{2.21}$$

Každé komplexní číslo z, jehož absolutní hodnota je rovna jedné, se nazývá komplexní jednotka.

Použijeme-li k výpočtu vzdálenosti komplexního čísla od počátku Pythagorovu větu, dostáváme vztah 2.21. Abychom komplexní číslo vyjádřili v polárních souřadnicích, musíme ještě definovat argument, neboli úhel, který bude číslo určovat. Zmíněný argument komplexního čísla odpovídá úhlu, který svírá polopřímka, určená počátkem a komplexním číslem s kladnou reálnou poloosou. V obrázku 2.12 tomu odpovídá úhel α. Tento úhel můžeme také spočítat pomocí funkcí sinus a kosinus v pravoúhlém trojúhelníku, a právě těmito vztahy definujeme argument komplexního čísla.



Obrázek 2.12: Znázornění absolutní hodnoty komplexního čísla $z = a + bi$

Definice 5 (Argument komplexního čísla)**.** *Nechť $z = a + bi$ je nenulové komplexní číslo s absolutní hodnotou r. Argument komplexního čísla je takový úhel α, pro který platí*

$$\sin\alpha = \frac{b}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{a}{r} \tag{2.22}$$

Argument komplexního čísla budeme značit $\arg(z)$.

Známe-li argument a absolutní hodnotu komplexního čísla, můžeme snadno vyjádřit komplexní číslo $a + bi$ v polárních souřadnicích. Definice argumentu komplexního čísla je zároveň návodem k výpočtu. Povšimněte si, že argument komplexního čísla není určen jednoznačně. Z periodicity funkcí sinus a kosinus víme, že budou-li splněny rovnice 2.22 pro úhel α, pak jistě budou splněny i pro úhel $\alpha + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Tato vlastnost argumentu komplexního čísla se nám bude hodit při hledání odmocnin.

Uvažujme nyní komplexní číslo $a + bi \neq 0$ s argumentem α a absolutní hodnotou $|z|$.

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} \qquad \sin\alpha = \frac{b}{|z|}$$
$$a = |z|\cos\alpha \qquad b = |z|\sin\alpha$$

Pokud nyní dosadíme za a, b, dostaneme komplexní číslo vyjádřené pouze pomocí argumentu a absolutní hodnoty.

$$a + bi = |z|\cos\alpha + i|z|\sin\alpha = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Definice 6 (Goniometrický tvar komplexního čísla). *Vyjádření nenulového komplexního čísla z ve tvaru*

$$z = |z|\cos\alpha + i|z|\sin\alpha = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha), \tag{2.23}$$

kde α je $\arg(z)$, se nazývá goniometrický tvar komplexního čísla z.

Příklad 3. *Vyjádřete číslo $z = 1 + \sqrt{3}i$ v goniometrickém tvaru.*

Řešení. Začněme určením absolutní hodnoty komplexního čísla z.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

Nyní je třeba určit $\alpha = \arg(z)$. Z rovnic 2.22 vyplývá, že hledáme úhel v prvním kvadrantu, protože je sinus i kosinus kladný, avšak mnohem jednodušší způsob určení kvadrantu úhlu α je z obrázku 2.7. Víme-li, že hledáme úhel v prvním kvadrantu, snadno určíme hodnotu úhlu α.

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Nyní už můžeme vyjádřit číslo z v goniometrickém tvaru.

$$z = 1 + \sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

Pro nulu nemá podobný tvar smysl, neboť argument nuly nelze definovat. Na první pohled by se mohlo zdát, že goniometrický tvar nenabízí oproti algebraickému tvaru komplexního čísla žádné výhody, pouze vypadá komplikovaněji. Ukážeme si, že teprve tento tvar komplexního čísla nám definitivně odhalí geometrickou podstatu násobení komplexních čísel.

Uvažujme komplexní čísla z, w v goniometrickém tvaru.

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ w &= |w|(\cos\beta + i\sin\beta) \end{aligned}$$

Nyní se podívejme na jejich součin.

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot |w|(\cos\beta + i\sin\beta) \\
z \cdot w &= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta) \\
z \cdot w &= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) \\
z \cdot w &= |z||w|(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta)
\end{aligned}$$

Použitím součtových vzorců dojdeme k výsledku

$$z \cdot w = |z||w|(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)) \tag{2.24}$$

Z vyjádření 2.24 konečně vidíme, jak lze graficky znázornit násobení komplexních čísel. V první řadě se jedná o stejnolehlost se středem v počátku, což je očekávaná vlastnost. Navíc máme konečně průzračný doklad o tom, že násobení komplexních čísel odpovídá rotaci kolem 0 o orientovaný úhel odpovídající argumentu komplexního čísla. Tím máme algebraicky podložený obrázek 2.11. Mimo jiné z tohoto výsledku můžeme vyvodit ještě jednu zajímavou vlastnost, týkající se absolutní hodnoty komplexního čísla. Vynásobíme-li dvě komplexní čísla, pak absolutní hodnota součinu se rovná součinu absolutních hodnot činitelů.

$$|xy| = |x||y| \tag{2.25}$$

Podobným způsobem můžeme vyjádřit podíl komplexních čísel pro $w \neq 0$.

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\Big(\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)\Big) \tag{2.26}$$

Na základě vztahu 2.24 odvodíme tzv. Moivreovu větu, která popisuje, jakým způsobem můžeme zjednodušit výpočet mocniny komplexního čísla pomocí jeho goniometrického vyjádření. Nejprve si definujme $n-$tou mocninu komplexního čísla.

Definice 7 (Mocnina komplexního čísla)**.** *Pro každé komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme $n-$tou mocninu komplexního čísla jako*

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ činitelů}} \tag{2.27}$$

pro $z \neq 0$ definujeme

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} \tag{2.28}$$

a pro $n = 0$ a $z \neq 0$ definujeme

$$z^0 = 1 \tag{2.29}$$

Jelikož se definice celočíselné mocniny komplexního čísla shoduje s definicí mocniny reálných čísel, zůstanou zachovány stejné vztahy pro práci s mocninami. Pro celá čísla m, n a nenulové komplexní číslo z platí

$$z^n \cdot z^m = z^{m+n} \qquad (z^n)^m = z^{mn}$$

Věta 1 (Moivreova věta)**.** *Pro libovolné reálné číslo α a libovolné celé číslo n platí*

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) \tag{2.30}$$

Důkaz. Tento vztah je zřejmým důsledkem rovnosti 2.24. Například ihned vidíme, že pokud za z zvolíme komplexní jednotku a dosadíme-li $w = z$, dostaneme tvrzení $Moivreovy$ *věty* pro $n = 2$.

$$\begin{aligned} z^2 = z \cdot z &= (\cos(\alpha + \alpha) + i \sin(\alpha + \alpha)) = \\ &= (\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)) \end{aligned}$$

Podobně můžeme pokračovat i dále, což nás vede k důkazu matematickou indukcí. Předpokládejme tedy platnost 4.1 pro $n = k$ a ukážeme, že z toho plyne platnost tvrzení pro $n = k + 1$.

$$z^{k+1} = z^k \cdot z$$

Pro z^k použijeme indukční předpoklad a z zapíšeme v goniometrickém tvaru

$$z^{k+1} = (\cos(k\alpha) + i \sin(k\alpha))(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \tag{2.31}$$

Nyní už stačí jen použít vztah pro součin dvou komplexních čísel v goniometrickém tvaru 2.24

$$z^{k+1} = (\cos((k + 1)\alpha) + i \sin((k + 1)\alpha)) \tag{2.32}$$

Tvrzení pro k implikuje tvrzení pro $k + 1$, principem matematické indukce máme $Moivreovu$ *větu* dokázanou pro všechna přirozená čísla. Obdobným postupem tvrzení dokážeme pro záporné číslo n, pro $n = 0$ dokážeme tvrzení přímo z definice mocniny komplexního čísla.

□

Z Moivreovy věty plynou následující důsledky.

Pro n-tou mocninu libovolného komplexního čísla z s argumentem α platí:

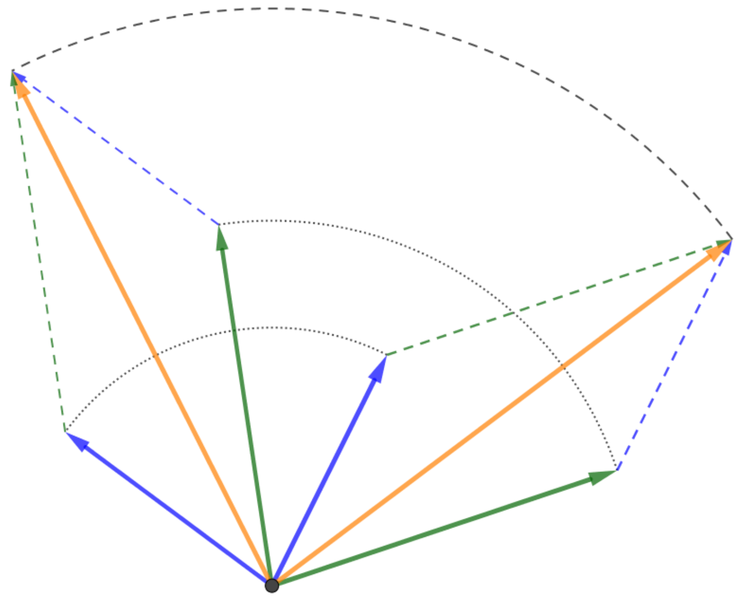
$$z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha))$$

Z parity funkcí sinus a kosinus odvodíme platnost vztahu

$$z^{-n} = |z|^{-n}(\cos(n\alpha) - i \sin(n\alpha))$$

Nyní si rozmysleme, zda při geometrickém znázornění komplexních čísel skutečně zůstanou zachovány všechny vlastnosti, které jsme výše uvedli při algebraické definici komplexních čísel. Nepochybně sčítání vektorů splňuje komutativitu, asociativitu a existují i opačný a nulový vektor. Znázorníme-li násobení jako rotaci a stejnolehlost s koeficientem k, víme, že nezáleží na tom, v jakém pořadí tato zobrazení provádíme *(máme-li stejný střed stejnolehlosti).* Rotace žádané vlastnosti také zachovává. Neutrální prvkem je rotace o nulový úhel se stejnolehlostí s koeficientem 1. Inverzním prvkem je rotace o opačný úhel se stejnolehlostí s koeficientem $\frac{1}{k}$. Poslední a nejsložitější vlastností, kterou jsme zatím neověřili, je distributivita.

Na obrázku 2.13 máme znázorněnu distributivitu rotace vůči sčítání vektorů. Nezáleží na tom, zdali vektory nejdříve sečteme a pak otočíme, nebo naopak. Stejnolehlost na výsledek jistě nebude mít vliv, tím máme ověřenu i distributivitu.

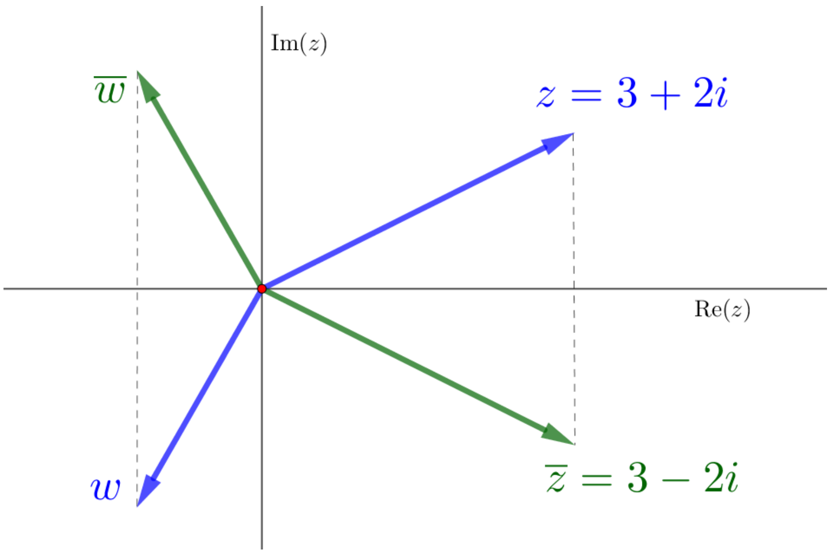


Obrázek 2.13: Distributivita sčítání vektorů a rotace

2.2.3 Komplexní sdružení

Při práci s komplexními čísly je vhodné definovat ještě jednu operaci, která u reálných čísel nemohla existovat. Jedná o tzv. komplexní sdružení, což je operace, která každému komplexnímu číslu $z = a+bi$ přiřadí číslo $\overline{z} = a-bi$, což v Gaussově rovině odpovídá souměrnosti podle reálné osy, jak ukazuje obrázek 2.14.

Definice 8 (Komplexně sdružené číslo)**.** *Číslem komplexně sdruženým k číslu $z = a + bi$ nazýváme komplexní číslo $\overline{z} = a - bi$.*



Obrázek 2.14: Distributivita sčítání vektorů a rotace

Příklad 4. *Graficky i početně ověřte následující vlastnosti komplexně sdružených čísel.*

$$\overline{\overline{z}} = z \tag{2.33}$$

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} \tag{2.34}$$

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w} \tag{2.35}$$

Navíc zřejmě pro každé reálné číslo r platí

$$\overline{r} = r \tag{2.36}$$

Vyjádříme-li komplexně sdružené číslo v goniometrickém tvaru, dostaneme dvě různé možnosti zápisu. Buď změníme znaménko imaginární složky, nebo ekvivalentně změníme znaménko argumentu komplexního čísla. Rovnost plyne z parity goniometrických funkcí.

$$|z|(\cos(\alpha) - i\sin(\alpha)) = |z|(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) \tag{2.37}$$

Komplexní sdružení nám umožňuje poměrně jednoduché vyjádření absolutní hodnoty komplexního čísla, jeho imaginární či reálné části. Začněme součinem komplexního čísla z s komplexně sdruženým číslem $\bar{z}$.

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a+bi)(a-bi) = \\ &= a^2 + abi - abi + b^2 = \\ &= a^2 + abi - abi + b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

Na pravé straně vidíme absolutní hodnotu komplexního čísla v druhé mocnině, což je kladné číslo. Odmocněním dostaneme alternativní způsob výpočtu absolutní hodnoty komplexního čísla.

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \tag{2.38}$$

Také při zavedení podílu komplexních čísel jsme využili komplexně sdruženého čísla. Úpravu 2.11 můžeme přepsat následovně.

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} &= \frac{1}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} \\ \frac{z}{w} &= z \cdot \frac{1}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} \end{aligned}$$

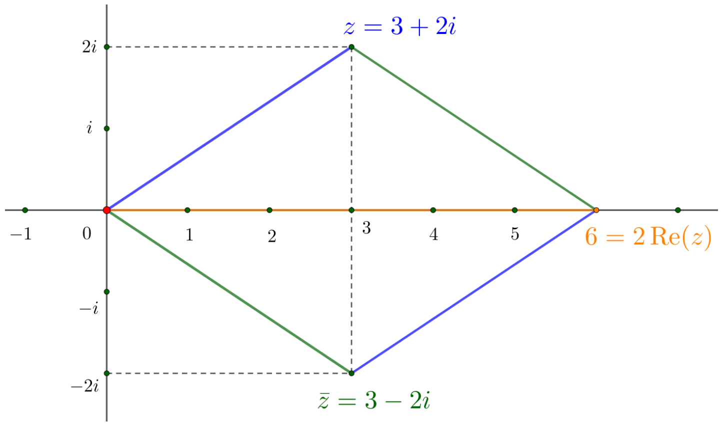
Jednotlivé složky komplexního čísla vyjádříme pomocí vhodného součtu:

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2\,\mathrm{Re}(z) \\ z - \bar{z} &= 2i\,\mathrm{Im}(z) \end{aligned}$$

Po vydělení dostaneme vyjádření složek komplexního čísla.

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \tag{2.39}$$

Právě odvozené identity můžeme jednoduše graficky zdůvodnit.



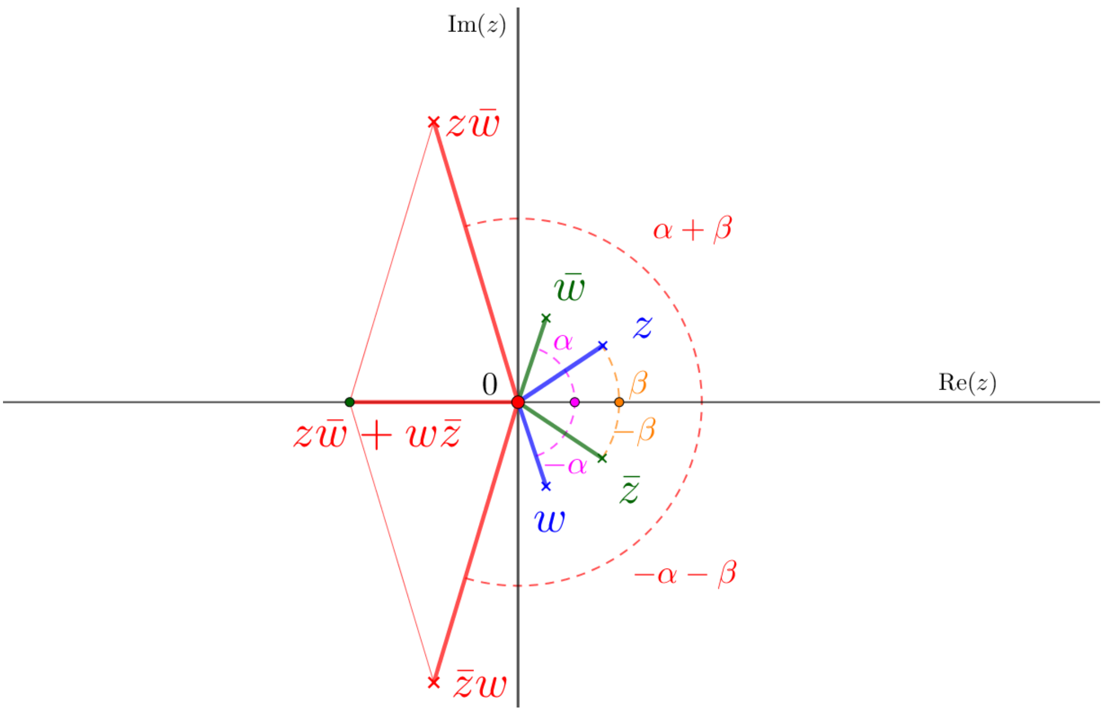
Obrázek 2.15: Komplexně sdružené číslo a reálná část komplexního čísla

Podobným způsobem můžeme odvodit mnohé další identity. Uveďme například ještě následující tvrzení, které využijeme v další kapitole.

$$\mathrm{Im}(z\overline{w} + \overline{z}w) = 0 \tag{2.40}$$

Tvrzení plyne z vlastností komplexního sdružení 2.35. Zřejmě pro libovolné $a \in \mathbb{C}$ platí $\mathrm{Im}(a + \overline{a}) = 0$ a zároveň platí $\overline{z\overline{w}} = \overline{z}w$, z čehož tvrzení 2.40 vyplývá.

I toto tvrzení můžeme jednoduše geometricky zdůvodnit, jak ukazuje obrázek 2.16. Při znázornění jsme využili geometrické interpretace součinu komplexních čísel a vyjádření komplexně sdruženého čísla 2.37.



Obrázek 2.16: Grafické znázornění identity 2.40

Mimo jiné je z obrázku snadno vidět i jedna z vlastností komplexního sdružení součinu komplexních čísel.

$$\overline{z\overline{w}} = \overline{z}w \tag{2.41}$$

Příklad 5. *Početně ověřte vztah 2.40.*

Řešení. Uvažujme komplexní čísla $z = a + bi$ a $w = c + di$.

$$\begin{aligned} z\overline{w} + \overline{z}w &= (a + bi)(c - di) + (a - bi)(c + di) = \\ &= ac + bd + (bc - da)i + ac + bd + (da - bc)i = \\ &= 2(ac + bd) \end{aligned}$$

Imaginární složka výsledku je zřejmě nulová. Povšimněte si, že jsme při úpravě ověřili také vztah 2.41.

Právě odvozených vztahů využijeme i v dalších kapitolách, nicméně jeden hezký výsledek si ukážeme už teď. Dosadíme-li do vztahu 2.41 za w číslo $\overline{z}$, dostaneme následující vztah.

$$\overline{z^2} = \overline{z}^2$$

Tento vztah můžeme znovu dosadit do 2.41, za w tentokrát volíme číslo $\overline{z}^2$ a drobnou úpravou dostaneme obdobné tvrzení pro třetí mocninu. Matematickou indukcí vztah zobecníme do následující podoby.

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n \tag{2.42}$$

Tato rovnost není jen zajímavá, ale i užitečná. Podívejme se, jak tento vztah můžeme využít při řešení rovnic. Uvažujme následující rovnici s reálnými koeficienty.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

Dále uvažujme komplexní číslo z, které je kořenem této rovnice. Číslo z dosadíme do rovnice a obě strany rovnice komplexně sdružíme.

$$\begin{aligned} 0 &= a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 \\ 0 &= \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0} \end{aligned}$$

Postupně aplikujeme vlastnosti 2.35 a 2.42. Při poslední úpravě využijeme předpokladu, že koeficienty rovnice jsou reálná čísla a použijeme 2.36.

$$\begin{aligned} 0 &= a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 \\ 0 &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + ... + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ 0 &= a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + ... + a_1 \overline{z} + a_0 \end{aligned}$$

Odvodili jsme následující tvrzení.[8]

Věta 2 (Lemma o komplexně sdružených kořenech)**.** *Je-li číslo z řešením polynomiální rovnice s reálnými koeficienty, pak je jejím řešením také číslo $\overline{z}$.*

Příklad 6. *Graficky znázorněte vztah $\overline{z}^2 = \overline{z^2}$.*

Příklad 7. *Nalezněte druhý kořen rovnice, víte-li, že jedním kořenem je číslo $5 + 4i$. Ověřte, že nově nalezený kořen je řešením rovnice.*

$$z^2 - 10x + 41 = 0$$

Řešení. Rovnice má reálné koeficienty, z věty 2 víme, že pokud číslo $5 + 4i$ je kořenem rovnice, pak i komplexně sdružené číslo $5 - 4i$ musí být řešením rovnice. Dosaďme číslo $5 - 4i$ do rovnice.

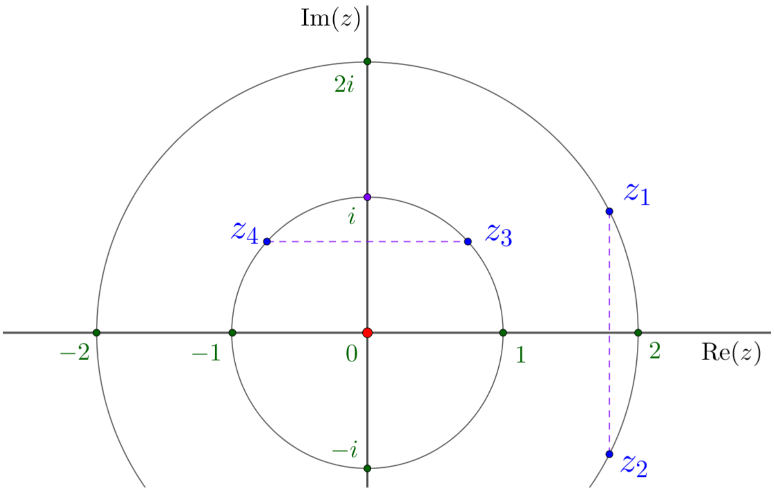
$$\begin{aligned} 0 &= (5 - 4i)^2 - 10(5 - 4i)z + 41 = \\ &= 9 - 40i - 50 + 40i + 41 = 0 \end{aligned}$$

Ověřili jsme, že číslo $5 - 4i$ je řešením rovnice.

Příklad 8. *Nalezněte všechny kořeny rovnice, víte-li, že mezi kořeny patří komplexní čísla i a $2 - 3i$.*

$$z^5 - 4z^4 + 14z^3 - 4z^2 + 13z = 0$$

Příklad 9. *Jsou dána komplexní čísla z_1, z_2, z_3, z_4 dle obrázku, určete jejich součin.*



Obrázek 2.17: Zadání příkladu

Řešení. Čísla z_1, z_2 jsou zřejmě komplexně sdružená. Proto platí:

$$z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2 = 4$$

Čísla z_3, z_4 jsou komplexní jednotky. Jejich součin můžeme odvodit na základě geometrické interpretace. Součet jejich argumentů je π, proto je součin $z_3 \cdot z_4$ roven -1. Součin komplexních čísel z_1, z_2, z_3, z_4 spočteme jako

$$z_1 z_2 z_3 z_4 = (z_1 z_2)(z_3 z_4) = 4 \cdot (-1) = -4$$

3. Rovinná geometrie a komplexní čísla

Komplexní čísla jsou velmi užitečným nástrojem při řešení úloh rovinné geometrie. Většinu známých úloh rovinné analytické geometrie můžeme přeformulovat tak, abychom mohli vhodně využít Gaussovy roviny a komplexních čísel. Úlohy, které budeme řešit, je možné spočítat i bez použití komplexních čísel, nicméně právě komplexní čísla nám zprostředkují kratší a elegantnější výpočet. Některé z příkladů se rovinné geometrie přímo týkají, jiné na první pohled s geometrií ani s komplexními čísly nemají mnoho společného. V případě odvození Heronova vzorce je využití komplexních čísel jen zajímavým trikem, který nám usnadní výpočet.

Jak jsme si již dříve řekli, komplexní čísla budeme ztotožňovat s body roviny a s příslušnými polohovými vektory. Komplexnímu číslu $z = a + bi$ přiřadíme bod $Z = [a, b]$ a také vektor $\vec{z} = (a, b)$. V některých situacích upřednostníme reprezentaci komplexních čísel pomocí bodů, jindy nám budou více vyhovovat vektory.

3.1 Obsahy n-úhelníků

V této sekci si ukážeme, jak můžeme vypočítat obsahy rovinných útvarů za pomoci komplexních čísel.

3.1.1 Obsah trojúhelníku

Začněme odvozením slavného *Heronova vzorce*. Obvykle se důkaz zakládá na relativně složitých úpravách goniometrických výrazů. Komplexní čísla nám umožní tyto výpočty skrýt do součinu komplexních čísel a celé odvození se tak velmi zjednoduší.

Věta 3 (Heronův vzorec)**.** *Jsou-li a, b, c délky stran trojúhelníku, pak jeho obsah S můžeme vyjádřit následujícím vztahem.*

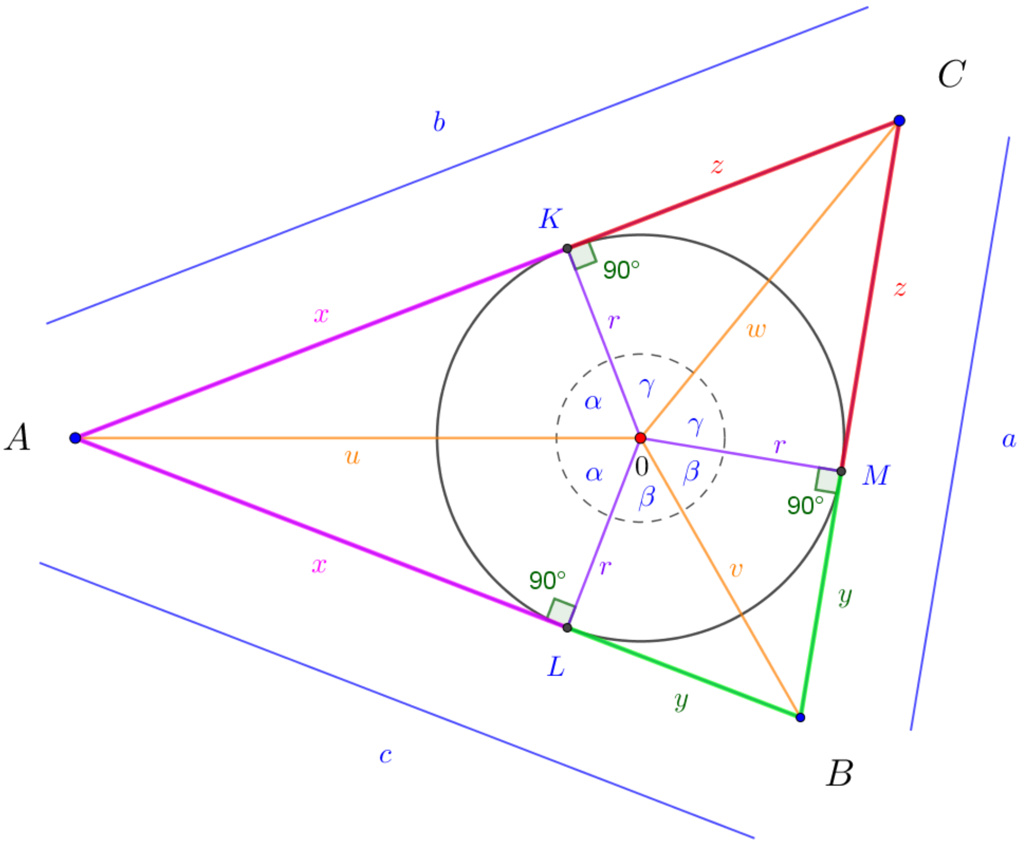
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{3.1}$$

kde s je polovina obvodu trojúhelníku.

Důkaz.
Dle obrázku 3.1 můžeme spočítat obsah trojúhelníku jako

$$S = xr + yr + zr = rs \tag{3.2}$$

Tím by byl důkaz ukončen, pokud bychom mohli jednoduše vyjádřit poloměr kružnice vepsané r. Zde využijeme komplexních čísel pro zjednodušení výpočtu. Pro odvození (a) označme body dotyku kružnice vepsané s trojúhelníkem K, L, M, umístíme střed S kružnice vepsané do 0 a otočíme trojúhelník tak, aby



Obrázek 3.1: Odvození Heronova vzorce

polopřímka SK odpovídala kladné reálné poloose. Podobně odvodíme i vztahy (b) a (c).

(a) $\quad r + ix = u(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$

(b) $\quad r + iy = v(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$

(c) $\quad r + iz = w(\cos(\gamma) + i\sin(\gamma))$

Nyní výše uvedené vztahy vynásobíme. Na pravé straně využijeme znalosti součinu komplexních čísel v goniometrickém tvaru.

$$(r + ix)(r + iy)(r + iz) = uvw(\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i\sin(\alpha + \beta + \gamma))$$

Na pravé straně se vyskytlo komplexní číslo s argumentem $\alpha + \beta + \gamma$. Z obrázku 3.1 vyčteme, že součet $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi$, proto na pravé straně rovnice je komplexní číslo s argumentem π.

$$r^3 + ir^2(x + y + z) - r(xz + xy + yz) - ixyz = uvw(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$$

Porovnáním imaginárních složek vyjádříme r

$$r^2(x + y + z) - xyz = 0$$

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}}$$

Dosazením do rovnice 3.2 dostaneme

$$S = rs = s\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

Využijeme vztahů $x + y + z = s$, $x = s - a$, $y = s - b$ a $z = s - c$.

$$\begin{aligned} S &= s\sqrt{\frac{xyz}{s}} = \\ &= \sqrt{sxyz} = \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

Tím je důkaz ukončen. Autorem tohoto krásného důkazu je M. D. Edwards [9].

□

Připomeňme si, jak lze vypočítat obsah trojúhelníku pomocí vektorového součinu. Uvažujme v rovině dva vektory (x_1, x_2) a (y_1, y_2). Abychom mohli využít vektorového součinu, doplníme poslední souřadnici nulou. Velikost vektorového součinu odpovídá obsahu rovnoběžníku, který je vektory zadán.

$$|(x_1,x_2,0) \times (y_1,y_2,0)| = |(0,0,x_1y_2 - y_1x_2)| = |x_1y_2 - y_1x_2| \tag{3.3}$$

Tento výpočet přeformulujeme do řeči komplexních čísel. Uvažujme komplexní čísla $z_1 = x_1 + ix_2$ a $z_2 = y_1 + iy_2$, nahradíme je vektory (x_1, x_2) a (y_1, y_2). Jelikož platí $\overline{z_1} \cdot z_2 = x_1y_1 + x_2y_2 + i(x_1y_2 - y_1x_2)$ můžeme vztah 3.3 přepsat následovně.

$$|(x_1,x_2,0) \times (y_1,y_2,0)| = |x_1y_2 - y_1x_2| = |\operatorname{Im}(\overline{z_1} \cdot z_2)| \tag{3.4}$$

Pak obsah trojúhelníku musí být poloviční.

$$S_\triangle = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(\overline{z_1} \cdot z_2)| \tag{3.5}$$

Věta 4 (Vzorce pro obsah trojúhelníků)**.** *V rovině je dán trojúhelník OZ_1Z_2. Vrcholy O, Z_1, Z_2 označují trojúhelník proti směru pohybu hodinových ručiček a jsou po řadě určeny komplexními čísly* 0, z_1, z_2. *Obsah S trojúhelníku OZ_1Z_2 vypočítáme vzorcem*

$$S = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{z_1} \cdot z_2) \tag{3.6}$$

Pro trojúhelník UVW, jehož vrcholy U, V, W označují trojúhelník proti směru pohybu hodinových ručiček a jsou po řadě určeny komplexními čísly u, v, w, vypočítáme jeho obsah S jako

$$S = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{u} \cdot v + \overline{v} \cdot w + \overline{w} \cdot u) \tag{3.7}$$

Důkaz. První vztah plyne přímo z vlastností vektorového součinu, jak jsme si výše odvodili 3.5. Jedinou změnou je absence absolutní hodnoty, která ovšem plyne z pravidla pravé ruky pro vektorový součin, které můžeme jednoznačně použít, protože víme, že jsou vrcholy označeny proti směru pohybu hodinových ručiček. Druhý vztah dostaneme tak, že celý trojúhelník nejprve posuneme jedním vrcholem do počátku. Vrcholy posunutého trojúhelníku budou $0, v-u, w-u$. Nyní již můžeme použít první vzorec pro výpočet obsahu. Označme $u = u_1 + iu_2$, $v = v_1 + iv_2$, $w = w_1 + iw_2$, po úpravě dostaneme výsledek.

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{(v-u)}\cdot(w-u)) = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big(((v_1-u_1)-i(v_2-u_2))((w_1-u_1)+i(w_2-u_2))\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(((v_1-u_1)(w_2-u_2)-(v_2-u_2)(w_1-u_1))\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(v_1w_2-u_1w_2-u_2v_1+u_1u_2+v_2u_1+u_2w_1-u_2u_1-v_2w_1\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\Big(v_1w_2-u_1w_2-u_2v_1+v_2u_1+u_2w_1-v_2w_1\Big)
\end{aligned}
$$

Výrazy v závorce vhodně spárujeme, čímž je důkaz ukončen.

$$
S = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{u_1v_2-u_2v_1}_{Im(\overline{u}\cdot v)}+\underbrace{w_2v_1-w_1v_2}_{Im(\overline{v}\cdot w)}+\underbrace{u_2w_1-u_1w_2}_{Im(\overline{w}\cdot u)}\Big)
$$

$\square$

3.1.2 Obsahy mnohoúhelníků

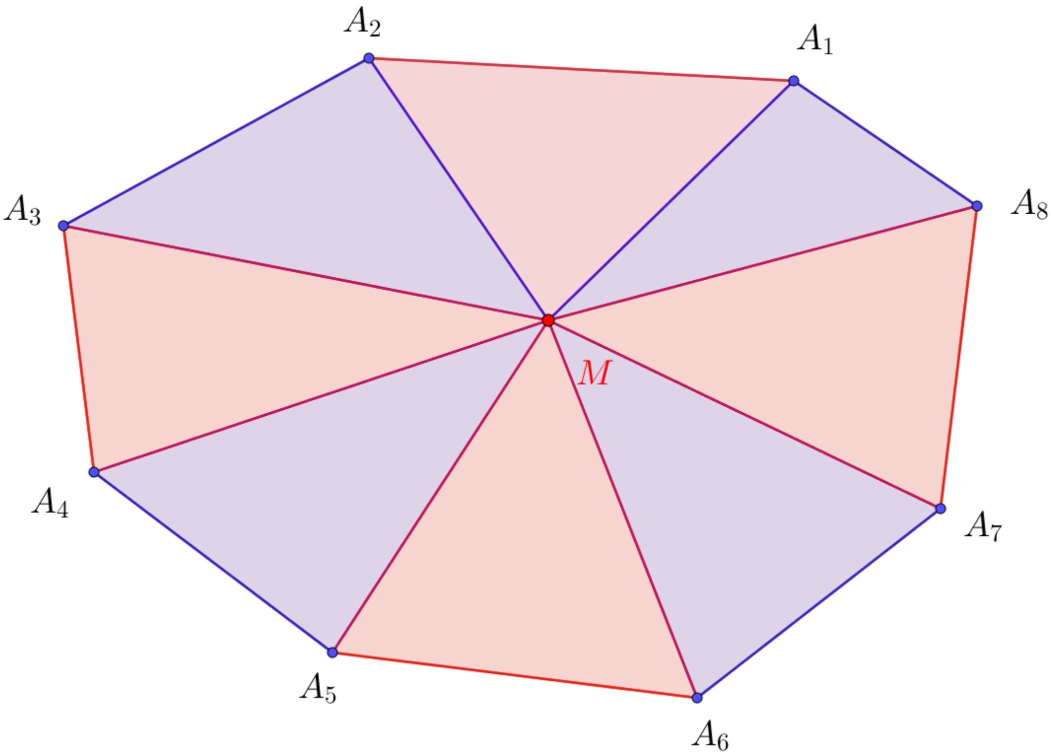
Dále si ukážeme, že je možné tento vzorec 3.7 zobecnit pro libovolný konvexní $n-$úhelník, a to velice jednoduchým elegantním postupem.

Mějme libovolný konvexní $n-$úhelník s vrcholy $A_1, A_2,..A_n$, které označují $n-$úhelník proti směru pohybu hodinových ručiček, s vnitřním bodem M. Vrcholy jsou po řadě zadané komplexními čísly a_1, a_2,..a_n, bod M odpovídá komplexnímu číslu m. Pak dle obrázku 3.2 můžeme obsah $n-$úhelníku spočítat jako součet obsahů n trojúhelníků.

Označíme-li obsah trojúhelníku $A_kA_{k+1}M$ jako S_k, pak obsah $n-$úhelníku vyjádříme následujícím vzorcem jako součet obsahů trojúhelníků. Při výpočtu budeme používat konvenci, že $A_{n+1} = A_1$.

$$
S = \sum_{k=1}^{n} S_k
$$

Nyní použijeme tento vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku 3.7 a sumu roztrhneme. Všimněte si, že každý z trojúhelníků $A_kA_{k+1}M$ je označen proti směru



Obrázek 3.2: Osmiúhelník a volba bodu M

pohybu hodinových ručiček, čímž jsou splněny předpoklady věty.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\overline{z_i} \cdot z_{i+1} + \overline{z_{i+1}} \cdot m + \overline{m} \cdot z_i) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n} \operatorname{Im} \overline{z_i} \cdot z_{i+1} + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \Big(\sum_{n=1}^{n} \overline{z_{i+1}} \cdot m + \sum_{n=1}^{n} \overline{m} \cdot z_{i+1} \Big) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n} \operatorname{Im} \overline{z_i} \cdot z_{i+1} + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \Big(m \overline{\sum_{n=1}^{n} z_{i+1}} + \overline{m} \sum_{n=1}^{n} z_{i+1} \Big)
\end{aligned}
$$

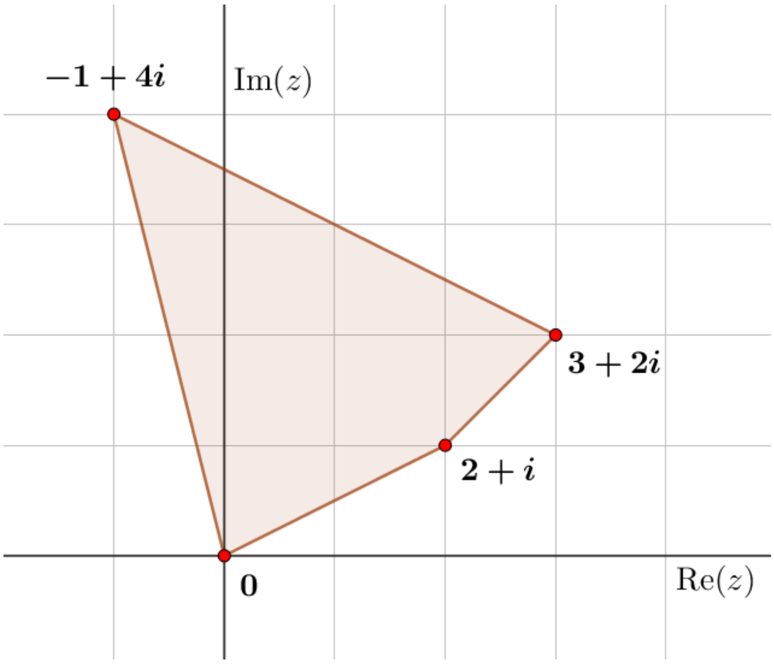
Na závěr použijeme vztah 2.40. Tím získáme vzorec, nezávislý na volbě bodu M, pro výpočet obsahu libovolného konvexního $n-$úhelníku. Tento důkaz je převzat z knihy [10].

$$
S = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{n} \overline{z_i} \cdot z_{i+1} \tag{3.8}
$$

Příklad 10. *Spočtěte obsah čtyřúhelníku $ABCD$, jehož vrcholy jsou po řadě zadány komplexními čísly* 0, $2+i$, $3+2i$ *a* $-1+4i$.

Řešení. Při řešení využijeme vzorec 3.8. Abychom vzorec mohli použít, musíme nejdříve ověřit konvexitu čtyřúhelníku. K tomu využijeme obrázek 3.3.

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big(\overline{0}(2+i) + \overline{(2+i)}(3+2i) + \overline{(3+2i)}(-1+4i) + \overline{(-1+4i)}(0)\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big((2-i)(3+2i) + (3-2i)(-1+4i)\Big) = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big(8+i+5+14i\Big) = \\
&= \frac{15}{2}
\end{aligned}
$$



Obrázek 3.3: Čtyřúhelník

Příklad 11. *Vypočtěte obsah pravidelného desetiúhelníku, který je vepsán do jednotkové kružnice.*

Řešení. Střed desetiúhelníku umístíme do počátku a jeden z vrcholů zadáme číslem 1, pak vrcholy desetiúhelníku zřejmě odpovídají komplexním číslům ve tvaru:

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{10} + i\sin\frac{2\pi k}{10} \qquad \forall k \in \{0,\,1,\,...,\,9\} \tag{3.9}$$

Vrcholy označují desetiúhelník proti směru pohybu hodinových ručiček, proto dle vzorce 3.8 sečteme $\overline{z_k}z_{k+1}$ pro každé $k \in \{0,\,1,...,9\}$. Komplexně sdružená čísla vyjádříme dle 2.37

$$\overline{z_k}z_{k+1} = \Big(\cos(-\frac{2\pi k}{10}) + i\sin(-\frac{2\pi k}{10})\Big)\cdot\Big(\cos\frac{2\pi(k+1)}{10} + i\sin\frac{2\pi(k+1)}{10}\Big)$$

Zde využijeme znalosti součinu komplexních čísel v goniometrickém tvaru 2.24 a dostaneme výsledek, který nezávisí na k.

$$\overline{z_k}z_{k+1} = \cos\frac{2\pi}{10} + i\sin\frac{2\pi}{10}$$

Dosazením do vzorce 3.8 dospějeme k řešení.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{10}\overline{z_n}\cdot z_{n+1} = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{10}\Big(\cos\frac{2\pi}{10} + i\sin\frac{2\pi}{10}\Big) = \\
&= \frac{10}{2}\operatorname{Im}\Big(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\Big) = \\
&= 5\sin\frac{\pi}{5}
\end{aligned}$$

Zobecněním řešení tohoto příkladu nalezneme obecný vzorec pro výpočet obsahu pravidelného $n-$úhelníku vepsaného do kružnice s poloměrem 1.

$$S_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

Povšimněte si, že na základě znalosti Moivreovy věty 4.1 bychom mohli vrcholy 3.9 zapsat jako z_1, z_1^2, $...z_1^{10}$. Potom můžeme výpočet provést s využitím znalostí úprav výrazů s komplexně sdruženými čísly.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{10}\overline{z_1^n}\cdot z_1^{n+1} = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{10}\overline{z_1^n}\cdot z_1^n\cdot z_1
\end{aligned}$$

Využijeme odvozených pravidel pro práci s komplexně sdruženými čísly 2.42 a 2.38, potom je výraz $\overline{z_1^n}\cdot z_1^n$ roven $(\overline{z_1}\cdot z_1)^n = 1^n$, čímž také dospějeme k řešení.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\sum_{n=1}^{10} z_1 = \\
&= 5\operatorname{Im} z_1 = \\
&= 5\sin(\frac{\pi}{5})
\end{aligned}$$

3.2 Pythagorejské trojice

Doposud jsme řešili problémy, které jsou od začátku ryze geometrické. V této sekci se podíváme na úlohu, která svou geometrickou podstatu získává až s komplexními čísly.

Možná jste si všimli, že v matematických testech při použití Pythagorovy věty často vychází celočíselný výsledek. Pokud jste byli pozorní, tak vám neušlo, že pravoúhlé trojúhelníky mnohdy mívají délky stran $\{3,\ 4,\ 5\}$ nebo $\{5,\ 12,\ 13\}$. Právě takové trojice přirozených čísel splňující rovnici 3.10 se nazývají pythagorejskými trojicemi.

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{3.10}$$

Zabývejme se otázkami, kolik takových trojic existuje a jak je nalézt. Mohlo by se zdát, že jde o poměrně náročnou algebraickou úlohu. Můžeme například dosazovat za a, b náhodná čísla a doufat, že výsledkem bude druhá mocnina přirozeného čísla (dále čtverec). Pravdou je, že existuje mnoho různých způsobů, jak dospět k výsledku, avšak většina z nich je početně náročná. Přeformulujme tuto úlohu do řeči komplexních čísel.

Zaměřme se na rovnici 3.10. Na levé straně máme výraz, který nápadně připomíná velikost komplexního čísla. Pro komplexní číslo $z = a + bi$ můžeme ekvivalentně psát

$$a^2 + b^2 = z \cdot \overline{z} = |z|^2 \tag{3.11}$$

Jinými slovy hledáme taková komplexní čísla, jejichž absolutní hodnota je přirozené číslo.

Do dalších úvah vezměme pouze komplexní čísla ve tvaru $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{Z}$, obvykle se nazývají *Gaussova čísla*. Dále vyloučíme ryze imaginární a ryze reálné čtverce, například: 4, $4i$, 9, $9i$..., čísla která sice mají celočíselnou absolutní hodnotu, ale uvedený vztah splňují triviálním a nezajímavým způsobem. (Příkladem by byl vztah $4^2 + 0^2 = 4^2$.)

Jak najít ta „správná“ komplexní čísla? Odpověď je překvapivě jednoduchá. Uvažujme libovolné komplexní číslo, například $z = 3 + 2i$, a spočtěme jeho absolutní hodnotu.

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2 + b^2} = \\ &= \sqrt{3^2 + 2^2} = \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

Náhodně zvolené komplexní číslo má absolutní hodnotu $\sqrt{13}$. My ale víme, že číslo z^2 musí mít absolutní hodnotu $|z|^2$, a proto po umocnění komplexního čísla z nutně dostaneme pythagorejskou trojici čísel.

$$\begin{aligned} (3 + 2i)(3 + 2i) &= 9 + 12i - 4 = \\ &= 5 + 12i \end{aligned}$$

Zkontrolujme, že absolutní hodnota čísla z^2 je 13.

$$\begin{aligned} \sqrt{(5 + 12i)(5 - 12i)} &= \sqrt{25 + 144} = \\ &= 13 \end{aligned}$$

a tím dostáváme novou pythagorejskou trojici $\{5,\ 12,\ 13\}$.

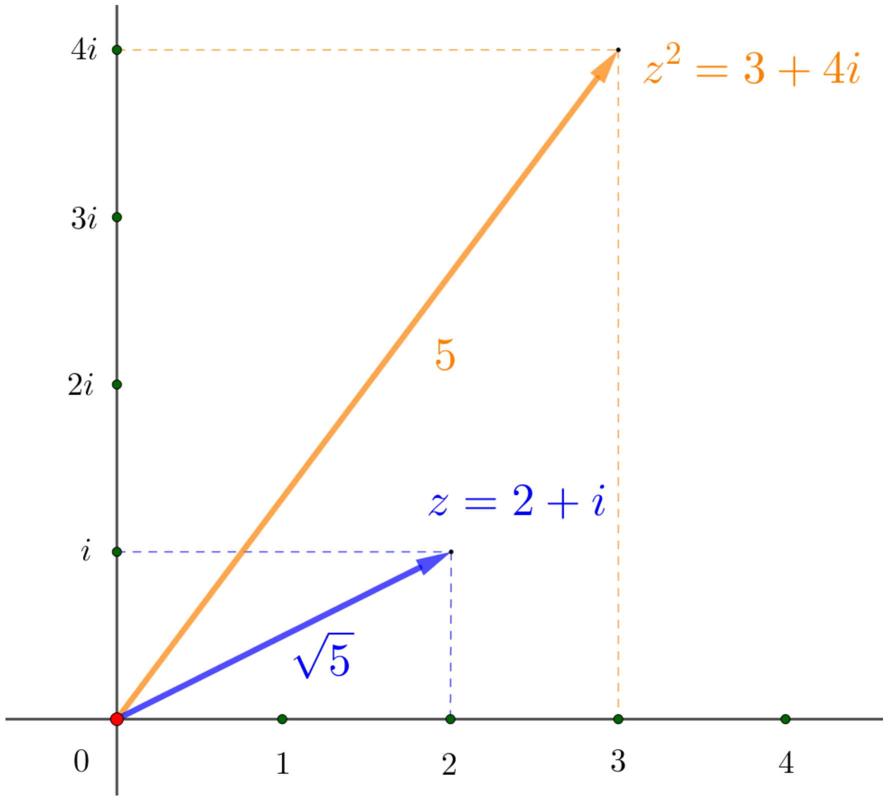
Provedeme-li tento postup pro obecné číslo z, dostaneme předpis pro pythagorejské trojice. Zvolme číslo $z = a + bi$ a spočtěme jeho druhou mocninu.

$$\begin{aligned} z^2 &= (a+bi)(a+bi) = \\ &= a^2 - b^2 + 2abi \end{aligned}$$

Absolutní hodnota čísla z je $\sqrt{a^2+b^2}$, proto absolutní hodnota jeho druhé mocniny je $a^2 + b^2$. Hledaný předpis pro pythagorejské trojice je následující. Zvolme libovolná přirozená čísla a, b, pak platí:

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 \tag{3.12}$$

čísla $\{a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2\}$ tvoří pythagorejskou trojici.



Obrázek 3.4: Pythagorejská trojice {3,4,5}

Obrázek znázorňuje nejznámější pythagorejskou trojici $\{3, 4, 5\}$, sami se můžete přesvědčit, že dosazením větších hodnot a, b dostaneme méně známé pythagorejské trojice. Například pro hodnoty $a = 94$, $b = 65$ dostaneme pythagorejskou trojici $\{4611, 12220, 13061\}$.

$$4611^2 + 12220^2 = 13061^2$$

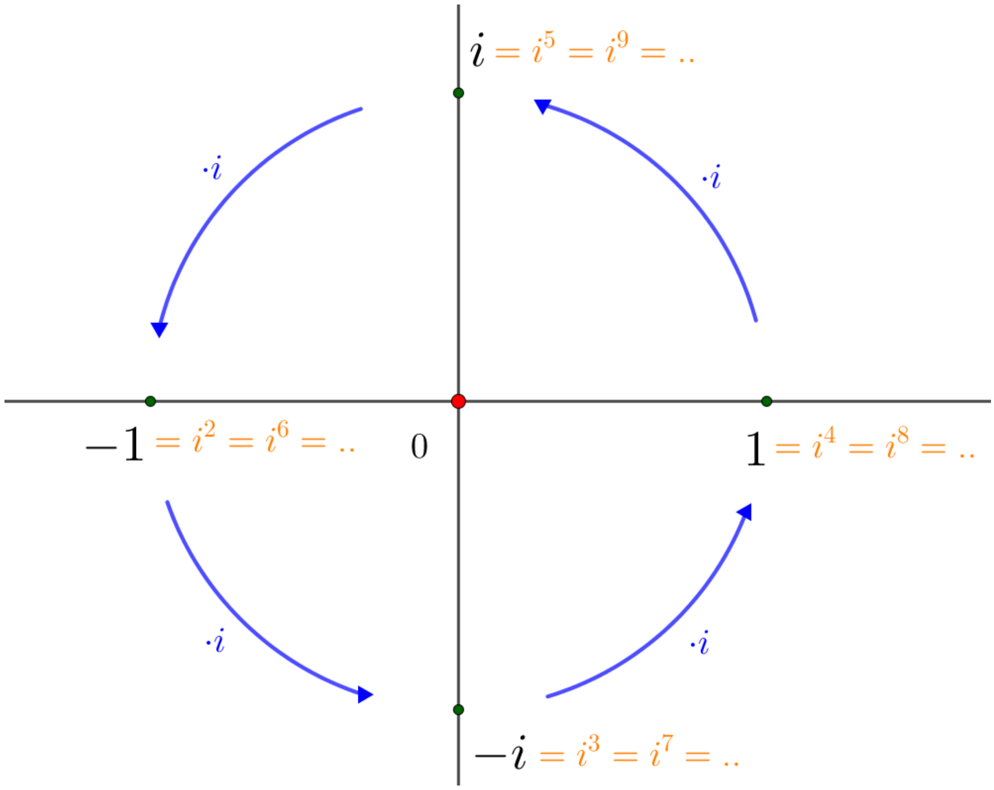
Inspirací k napsání této podkapitoly byl článek [11]

4. Mocniny, odmocniny a rovnice

Po zavedení komplexních čísel jsme vyřešili několik zajímavých úloh, které se převážně týkaly geometrie. V této kapitole si ukážeme, proč jsou komplexní čísla významná pro algebru. Zaměříme se na řešení polynomiálních rovnic. Nejdříve se podíváme, jak se chovají mocniny komplexních čísel a jak by bylo rozumné definovat odmocniny komplexních čísel. Postupně se dostaneme až k základní větě algebry.

4.1 Mocniny komplexních čísel

Mocniny komplexního čísla i můžeme snadno odvodit na základě geometrického znázornění. Jistě víte, jak snadno umocňovat číslo -1: pro sudá n dostaneme $(-1)^n = 1$ a pro lichá n dostaneme $(-1)^n = -1$, což můžeme ztotožnit s rotací o $180°$. Podobně si rozmyslíme chování mocnin čísla i. Připomeňme si, že násobení číslem i v Gaussově rovině odpovídá rotaci o $90°$, proto se mocniny čísla i cyklicky opakují. Otočíme-li číslo i o $90°$, dostaneme číslo -1, otočíme-li číslo -1 o $90°$, dostaneme číslo $-i$, při další otočení se dostaneme do čísla 1 a následně zpět do i. Při umocňování čísla i se tedy stále opakují hodnoty $i, -1, -i, 1, i, -1$... a tak dále, jak ukazuje obrázek 4.1.



Obrázek 4.1: Mocniny čísla i

Tento výsledek snadno dostaneme i úpravou:

$$\begin{aligned} i^1 &= i & i^2 &= -1 \\ i^3 &= i^2 \cdot i = & i^4 &= i^2 \cdot i^2 = \\ &= -i & &= (-1)\cdot(-1) = 1 \end{aligned}$$

Další možností je využití Moivreovy věty.

$$i = cos(\frac{\pi}{2}) + isin(\frac{\pi}{2})$$
$$i^n = cos(\frac{n\pi}{2}) + isin(\frac{n\pi}{2})$$

Jak tedy vyhodnotit výraz i^n? Zřejmě $(i^4)^k = 1$, proto výsledek zjistíme vzorcem:

$$n = 4k + m$$
$$i^n = i^{4k} \cdot i^m = i^m$$

Násobení komplexních čísel odpovídá složení rotace kolem počátku a stejnolehlosti, jak ukazuje vztah 2.24. Využijeme jeden z důsledků Moivreovy věty

$$z^n = |z|^n (cos(n\alpha) + isin(n\alpha))$$

který říká, jak umocňovat komplexní čísla v goniometrickém tvaru. Tato rovnost bude pro naše další počínání naprosto klíčová.

Další možností, jak spočítat mocninu komplexního čísla, je použití binomické věty.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k b^{n-k} \tag{4.1}$$

Příklad 12. *Vypočítejte třetí mocninu čísla $1+i$ pomocí binomické věty i pomocí Moivreovy věty.*

Řešení. Pomocí binomické věty

$$\begin{aligned} (1+i)^3 &= \binom{3}{0} + \binom{3}{1} i + \binom{3}{2} i^2 + \binom{3}{3} i^3 = \\ &= 1 + 3i - 3 + (-i) = \\ &= -2 + 2i \end{aligned}$$

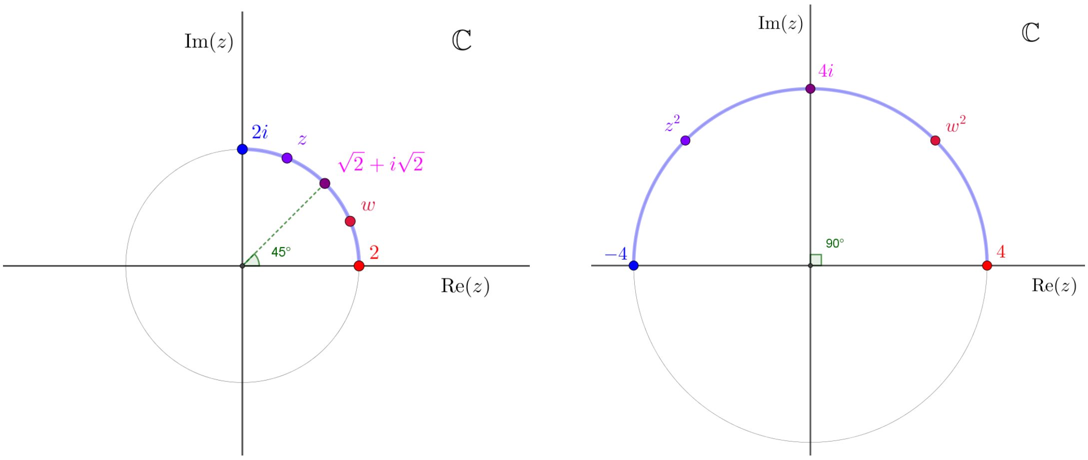
Pomocí Moivreovy věty

$$\begin{aligned} (1+i)^3 &= \sqrt{2}^3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^3 = \\ &= \sqrt{2}^3 \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \\ &= \sqrt{2}^3 (-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \\ &= -2 + 2i \end{aligned}$$

4.2 Rovnice

4.2.1 Binomické rovnice

Odmocňování komplexních čísel je na rozdíl od jejich umocňování podstatně složitější. Zatímco v oboru reálných čísel byla odmocnina definována pouze pro nezáporná čísla[1], v oboru komplexních čísel definujeme $n-$tou odmocninu pro každé komplexní číslo. Než definujeme odmocninu komplexních čísel, podívejme se, jak se umocní číselné množiny (tj. postupně umocníme všechna čísla dané množiny).



(a) x (b) x^2

Obrázek 4.2: Druhá mocnina komplexních čísel

Na obrázku 4.2 jsou znázorněny druhé mocniny komplexních čísel s absolutní hodnotou 2. Druhé mocniny těchto komplexních čísel mají velikost 4 a jejich argument se vynásobil dvěma. Pokud bychom umocnili všechna komplexní čísla s velikostí 2, jejíchž obrazy leží na čtvrtkružnici mezi čísly 2 a $2i$, dostaneme půlkružnici, která odpovídá komplexním číslům mezi čísly 4 a -4 (procházíme-li kružnici v kladném smyslu, neboli proti směru hodinových ručiček). Na základě tohoto příkladu snadno dospějeme k závěru, že pokud umocníme na druhou všechna čísla z půlkružnice komplexních čísel s absolutní hodnotou 2, výsledkem budou všechna komplexní čísla s absolutní hodnotou 4. Budeme-li postupně umocňovat na druhou všechna čísla s absolutní hodnotou 2, pak při postupném znázorňování výsledků projdeme dvakrát kružnici komplexních čísel s absolutní hodnotou 4.

Na základě této úvahy můžeme uhodnout řešení tzv. *binomických rovnic*, což jsou rovnice ve tvaru $z^n = w$.

Příklad 13. *Nalezněte všechna komplexní čísla, která splňují rovnici:*

$$z^3 = 8. \tag{4.2}$$

[1]Pro liché odmocniny je možné definovat odmocninu pro všechna reálná čísla.

Řešení. Zřejmě budou řešením komplexní čísla s absolutní hodnotou 2. Při umocnění na třetí se argument každého komplexního čísla zvětší třikrát. Proto hledáme takové argumenty komplexních čísel, které po vynásobení budou rovny celému násobku 2π (což odpovídá argumentu čísla 8). Takových argumentů existuje nekonečně mnoho. V základním intervalu $[0, 2\pi)$ se jedná pouze o argumenty 0, $\frac{2\pi}{3}$ a $\frac{4\pi}{3}$. Řešením rovnice jsou proto čísla

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \\ z_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1 + \sqrt{3}i \\ z_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Nyní si řekněme, jak bychom chtěli definovat odmocninu komplexního čísla. Uvažujme rovnici

$$z^n = w \tag{4.3}$$

Chceme najít taková čísla, která po umocnění na $n-$tou budou rovna w. Z předchozí úvahy víme, že takových čísel zřejmě existuje právě n. Nyní se podíváme, jak nalézt všechna komplexní čísla, která toto splňují.

V goniometrickém tvaru můžeme čísla o velikosti $\sqrt[n]{|w|}$ zapsat takto:

$$z = \sqrt[n]{|w|}\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Po umocnění na n dostaneme dle Moivreovy věty

$$z^n = |w|\,(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$$

Po umocnění bude výsledkem číslo w právě tehdy, když argument $n\alpha$ bude v základním tvaru roven argumentu čísla w, označme $\arg(w) = \beta + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$.[2]

$$n\alpha = \beta + 2k\pi$$

Řešením jsou čísla s argumentem $\alpha = \frac{\beta+2k\pi}{n}$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Snadno zjistíme, že pro k stačí uvažovat čísla z množiny $\{0,1,2,..(n-1)\}$, neboť pro $k = n$ dostaneme argument $\alpha = \frac{\beta+2n\pi}{n} = \frac{\beta}{n} + 2\pi$, což odpovídá stejnému argumentu jako volba $k = 0$, jelikož nezáleží na přičtení celých násobků 2π. Řešením rovnice 4.3 jsou čísla ve tvaru

$$\sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{\beta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\beta+2k\pi}{n}\right),\ \textit{kde}\ k \in \{0,1,2,..(n-1)\}. \tag{4.4}$$

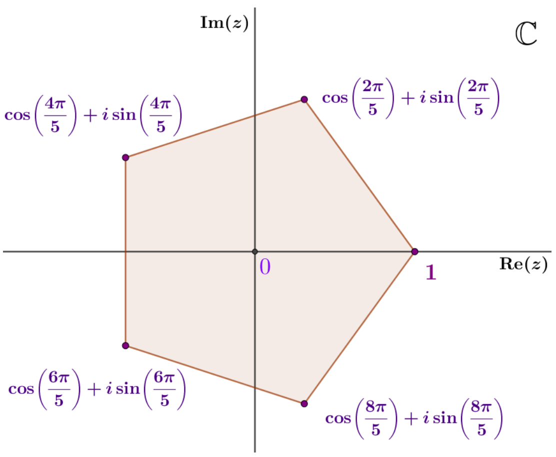
[2] Argument komplexních čísel není určen jednoznačně, může se lišit přičtením celočíselného násobku 2π

Obecně tedy platí, že při řešení rovnice 4.3 dostaneme n komplexních čísel, která tuto rovnici splňují. Jako $n-$tou odmocninu z těchto čísel nebudeme vybírat jedno konkrétní číslo, ale budeme za $n-$tou odmocninu komplexního čísla w považovat každé komplexní číslo, která splňuje příslušnou rovnici $z^n = w$.

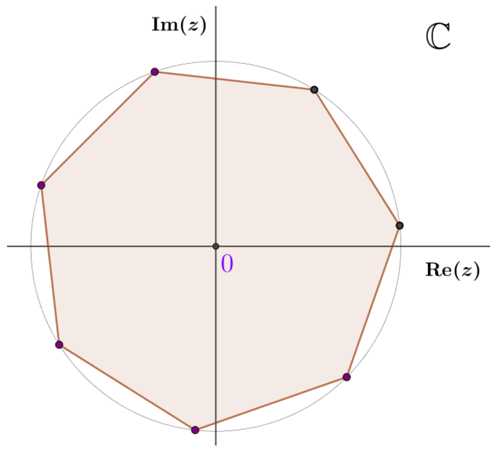
Definice 9. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n-$tá odmocnina $\sqrt[n]{z}$ komplexního čísla z každé komplexní číslo w splňující rovnici*

$$w^n = z$$

Řešení rovnice 4.4 nám dává přímý předpis pro nalezení odmocniny komplexního čísla. Zobrazíme-li $n-$tou odmocninu komplexního čísla v Gaussově rovině, dostaneme pravidelný $n-$úhelník (platí pouze pro $n > 2$, aby byl výsledkem alespoň trojúhelník). Na obrázcích 4.3 vidíme znázorněné řešení rovnic $x^5 = 1$ a $x^7 = 1 + i$.



(a) $x^5 = 1$



(b) $x^7 = 1 + i$

Obrázek 4.3: Binomické rovnice

Ve druhé kapitole jsme si odvodili tvrzení 2, které můžeme používat při hledání kořenů. Například při řešení binomické rovnice 4.2 jsme nalezli tři kořeny, z nichž jeden byl reálný a zbylé dva komplexní, provázané komplexním sdružením.[3] Dalším příkladem je řešení rovnice $x^5 = 1$ uvedené na obrázku 4.3. Naproti tomu rovnice $x^7 = 1 + i$ nesplňuje předpoklady věty a její komplexní kořeny nejsou po dvou komplexně sdružené. [4]

Dříve se místo čísla i používalo značení $\sqrt{-1}$, které je sice na první pohled intuitivnější než označení i, ale již při druhém pohledu vidíme, že takové značení bohužel koliduje s definicí komplexní odmocniny. Rovnice $x^2 = -1$ nemá pouze jedno řešení, které bychom mohli označit jako $\sqrt{-1}$. Řešením této binomické rovnice jsou dvě hodnoty $\{i, \ -i\}$.

[3] Při použití této věty nezapomínejte na kontrolu předpokladů věty. Je třeba ověřit, že koeficienty rovnice jsou reálná čísla.

[4] To vidíme z obrázku, neboť rozmístění kořenů není osově souměrné podle reálné osy.

4.2.2 Kvadratická rovnice

Jistým problémem při řešení kvadratických rovnic v oboru reálných čísel je to, že není možné zaručit existenci řešení, protože se při výpočtu mohla vyskytnout nedefinovaná odmocnina ze záporného čísla. Komplexní odmocnina je naproti tomu definována pro každé komplexní číslo, proto odmocniny záporných ani jiných komplexních čísel nebudou představovat neřešitelný problém. Uvažujme kvadratickou rovnici s koeficienty a, b, $c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

$$az^2 + bz + c = 0$$

Rovnici s koeficienty z oboru komplexních čísel můžeme upravovat stejně jako kvadratickou rovnici v oboru reálných čísel, proto formule pro vyjádření kořenů rovnice pomocí diskriminantu zůstane nezměněna.

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.5}$$

Druhé odmocniny komplexního čísla w můžeme spočítat z vyjádření 4.4 jako:

$$\left\{ \sqrt{|w|}\Big(\cos\frac{\beta}{2} + i \sin\frac{\beta}{2}\Big),\ \sqrt{|w|}\Big(\cos\Big(\frac{\beta}{2} + \pi\Big) + i \sin\Big(\frac{\beta}{2} + \pi\Big)\Big) \right\} \tag{4.6}$$

Tímto způsobem budeme řešit kvadratické rovnice pouze v nejobecnější podobě (tj. rovnici s komplexními koeficienty). Nejsložitější částí řešení je druhá odmocnina z komplexního čísla. Vyskytne-li se pod odmocninou záporné číslo w, vystačíme si s jednodušší úpravou. Hledané odmocniny odpovídají číslům

$$\{\sqrt{|w|}i,\ -\sqrt{|w|}i\} \tag{4.7}$$

Čísla, která odpovídají druhé odmocnině komplexního čísla, se liší v argumentu o π. To znamená, že tato čísla se liší rotací o $180°$ kolem počátku, což odpovídá vynásobení číslem -1, proto není třeba ve vzorci 4.5 uvažovat znaménka $\pm$, jelikož se nám obě znaménka přirozeně vyskytnou v druhé odmocnině komplexního čísla. Můžeme tedy zjednodušit vyjádření kořenů z_1, z_2 kvadratické rovnice na

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Poznámka. Nezapomínejme na to, že dvě různé odmocniny mají i kladná reálná čísla. Například $\sqrt{25}$ odpovídá číslům $\{5,\ -5\}$.

Příklad 14. *Vyřešte rovnici:*

$$\frac{1}{2}z^2 + z + 13 = 0$$

Řešení. Využijeme vzorec 4.5, nejprve vyjádříme $\sqrt{b^2 - 4ac}$

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{1 - 26} = \sqrt{-25}$$

Nyní je třeba spočítat odmocninu.

$$\sqrt{-25} = \pm 5i$$

Množina všech kořenů rovnice je

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm 5i}{1} \qquad\qquad K = \{-1 + 5i, -1 - 5i\}$$

Mezi náročnější příklady patří rovnice s koeficienty z oboru komplexních čísel.

Příklad 15. *Vyřešte rovnici:*

$$(1 + i)z^2 + (2 + 2i)z + i = 0$$

Řešení. Využijeme vzorec 4.5, nejprve vyjádříme $\sqrt{b^2 - 4ac}$

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2 - 4ac} &= \sqrt{(2 + 2i)^2 - 4i(1 + i)} = \\ &= \sqrt{8i - 4i + 4} = \\ &= \sqrt{4 + 4i}\end{aligned}$$

Potřebujeme spočítat odmocninu z komplexního čísla $4 + 4i$, nejdříve ho převedeme do goniometrického tvaru, označme $arg(4 + 4i) = \alpha$.

$$\begin{aligned}|4 + 4i| &= \sqrt{32} \\ \sin\alpha &= \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad \Longrightarrow\ \alpha = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

V goniometrickém tvaru vyjádříme $\sqrt{4 + 4i}$ dle 4.6.

$$\left\{2\sqrt[4]{2}\Big(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\Big),\ -2\sqrt[4]{2}\Big(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\Big)\right\}$$

Množinu všech kořenů dostaneme z 4.5

$$K = \left\{\frac{-2 - 2i + 2\sqrt[4]{2}\big(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\big)}{2 + 2i}, \frac{-2 - 2i - 2\sqrt[4]{2}\big(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\big)}{2 + 2i}\right\}$$

4.2.3 Kubická rovnice a historie komplexních čísel

V dnešní době se zavedení oboru komplexních čísel často motivuje řešením kvadratických rovnic, ale tak se to historicky neudálo. Kvadratické rovnice občas řešení měly, jindy ne, což matematiky příliš netrápilo, jelikož to odpovídalo geometrické představě. Například při řešení úlohy o nalezení průsečíku přímky s kružnicí je třeba vyřešit kvadratickou rovnici. Výsledkem jsou buď dva různé kořeny, jeden dvojnásobný kořen, nebo rovnice nemá řešení. To hezky korespondovalo s geometrickou představou, že kružnice a přímka mají buď dva společné body, jeden společný bod, nebo se přímka s kružnicí neprotíná.

Prvním podnětem pro studium komplexních čísel bylo řešení kubických rovnic, kdy se ukázalo, že odmocniny ze záporných čísel mohou při správném zacházení pomoci k výpočtu výsledku. Poprvé se matematikům podařilo vyřešit kubické rovnice ve středověku. Zasloužili se o to matematici Scipione del Ferro, Nicolò Fontana a jistým způsobem také Gerolamo Cardano, který publikoval práci o řešení kubických rovnic svých předchůdců. Krátce si představíme vzorec, který vyjadřuje řešení kubické rovnice. V dnešní době je znám jako Cardanův vzorec.

Uvažujme kubickou rovnici 4.8, s koeficienty α, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$, kde $\alpha \neq 0$.

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0 \tag{4.8}$$

Rovnici 4.8 vydělíme koeficientem α a pro zjednodušení rovnici přeznačíme

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{4.9}$$

Použitím substituce $x' = x - \frac{b}{3}$ se nám vždy podaří eliminovat kvadratický člen kubické rovnice. Proto bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat kubické rovnice ve tvaru 4.10, kde jsme navíc převedli lineární a absolutní člen na pravou stranu. Tento tvar budeme nazývat normovaným tvarem kubické rovnice.

$$x^3 = px + q \tag{4.10}$$

Máme-li kubickou rovnici v normovaném tvaru, můžeme použít tzv. Cardanův vzorec pro nalezení kořenu. [5]

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} \tag{4.11}$$

Příklad 16. *Využijte Cardanův vzorec k nalezení kořenu rovnice.*

$$x^3 = 3x + 2$$

Řešení. Dosadíme koeficienty rovnice do Cardanova vzorce.

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{27}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{27}{27}}} = 2$$

Abychom pochopili úskalí tohoto vzorce, musíme si uvědomit, že odmocniny, které se ve vzorci vyskytují, jsou definovány jen pro kladná čísla, jelikož záporná ani komplexní čísla v té době ještě nebyla objevena. Matematici zjistili, že Cardanův vzorec často vedl k nesmyslnému výpočtu (odmocnině ze záporného čísla) i v případě, že známe kořeny rovnice. Vyzkoušejme si to na příkladu.

Vytvoříme si kubickou rovnici, u které známe kořeny.[6]

$$(x+3)(x-1)(x-2) = x^3 - 7x + 6 = 0$$
$$x^3 = 7x - 6$$

[5] Ve vzorci je použita reálná odmocnina.

[6] Kořeny jsme zvolili tak, aby rovnice byla v normovaném tvaru.

Řešením rovnice jsou zřejmě čísla $-3, 1, 2$. Pokusíme se nyní vyřešit tuto rovnici použitím Cardanova vzorce.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{-6}{2} + \sqrt{\frac{36}{4} - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-6}{2} - \sqrt{\frac{36}{4} - \frac{343}{27}}} = \\ &= \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{-100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{-100}{27}}} \end{aligned}$$

Pravděpodobně si umíte představit zklamání matematiků šestnáctého století. Řešení rovnice jsou reálná čísla, ale při řešení rovnice Cardanovým vzorcem jsme dospěli k odmocnině ze záporného čísla. Zároveň víme, že číslo 2 je kořenem rovnice. Mohla by skutečně platit následující rovnost?[7]

$$2 = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{\frac{-100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{\frac{-100}{27}}}$$

Matematik Rafeal Bombelli narazil na podobnou rovnost a snažil se problém vyřešit. Na rozdíl od ostatních matematiků se nebál pracovat s výrazy $\pm\sqrt{-1}$, kterým přisoudil správné aritmetické vlastnosti, které dnes odpovídají číslům $\pm i$. Podařilo se mu tak řešit i rovnice, jejichž řešení vedlo oborem komplexních čísel. Přesto ještě dlouho poté matematici komplexním číslům příliš nedůvěřovali a označovali je často za nemožná čísla, což svým způsobem trvá až dodnes, neboť číslo i běžně označujeme jako číslo imaginární.

Při výkladu historie komplexních čísel a kubických rovnic jsme čerpali informace z [4] a [12].

4.2.4 Goniometrická substituce při řešení kubické rovnice

Matematici ukázali, že bez komplexních čísel nemůžeme pomocí radikálů[8] vyjádřit kořeny kubických rovnic ani v případě, že příslušná kubická rovnice má pouze reálné kořeny. Ukážeme si, jak kořeny vyjádřit pomocí goniometrické substituce.

Mocniny komplexních čísel umíme vyjádřit dvěma ekvivalentními způsoby, pomocí binomické a Moivreovy věty. Současným použitím a porovnání obou metod odvodíme zajímavé goniometrické identity, které jsou použitelné například při řešení rovnic vyšších stupňů. Odvodíme vzorec pro trojnásobnou hodnotu argumentu funkcí sinus a kosinus a použijeme tyto vzorce při řešení kubické rovnice.

[7] Dnes víme, že výrazu na pravé straně odpovídají další dvě čísla, proto takto uvedená rovnost není korektní, to ale matematici v šestnáctém století nevěděli.

[8] Matematické operace $+, -, \cdot, \sqrt[n]{}, \div$

Uvažujme komplexní jednotku $z = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, spočtěme třetí mocninu pomocí binomické věty a zároveň pomocí Moivreovy věty.

$$\begin{aligned}\Big(\cos\alpha + i\sin\alpha\Big)^3 &= \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha\\ \Big(\cos\alpha + i\sin\alpha\Big)^3 &= \binom{3}{0}\cos^3\alpha + \binom{3}{1} i\cos^2\alpha\sin\alpha\\ &\quad - \binom{3}{2}\cos\alpha\sin^2\alpha - \binom{3}{3} i\sin^3\alpha\end{aligned}$$

Porovnáním reálné a imaginární složky pravých stran dostaneme tyto dva vztahy

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha\\ \sin 3\alpha &= -\sin^3\alpha + 3\cos^2\alpha\sin\alpha\end{aligned}$$

V první rovnosti se zbavíme funkce sinus pomocí vztahu $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, v druhé rovnosti eliminujeme funkci kosinus vztahem $1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3cos\alpha \tag{4.12}$$

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$$

Právě odvozený vzorec pro trojnásobnou hodnotu argumentu funkce kosinus využijeme pro nalezení kořenů rovnice 4.10 [9]

$$\begin{aligned}x^3 - px &= q\\ 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) &= \cos(3\alpha)\end{aligned}$$

Na první pohled toho tyto dvě rovnice nemají mnoho společného, ale vhodnou substitucí upravíme rovnici až do tvaru, který bude podobný goniometrickému vzorci pro trojnásobnou hodnotu argumentu. Substituujme $x = t\cos(\alpha)$, kde $t > 0$ a $\alpha \in [0{,}2\pi)$.

$$\begin{aligned}t^3\cos^3(\alpha) - pt\cos(\alpha) &= q\\ 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha) &= \cos(3\alpha)\end{aligned}$$

Vynásobíme-li první rovnici výrazem $\frac{4}{t^3}$, dostaneme dvě pozoruhodně podobné rovnice. Porovnáním koeficientů v rovnicích dostaneme soustavu rovnic, ze které vyjádříme úhel α a parametr t, čímž určíme neznámou x.

$$\begin{aligned}4\cos(\alpha)^3 - \frac{4p}{t^2}\cos(\alpha) &= \frac{4q}{t^3}\\ 4\cos(\alpha)^3 - 3\cos(\alpha) &= \cos(3\alpha)\end{aligned}$$

[9] Což námi zvolená rovnice splňuje.

Porovnáním koeficientů rovnici vyřešíme.

$$
\begin{aligned}
-\frac{4p}{t^2} &= -3\\
\frac{4q}{t^3} &= \cos(3\alpha)
\end{aligned}
$$

Právě odvozenou soustavu rovnic můžeme použít k nalezení kořenů rovnice $x^3 = 7x - 6$. Do soustavy rovnic dosadíme $p = 7$ a $q = -6$.

$$
\begin{aligned}
-\frac{28}{t^2} &= -3\\
-\frac{24}{t^3} &= \cos(3\alpha)
\end{aligned}
$$

Z první rovnice vyjádříme $t = \sqrt{\frac{28}{3}}$ a dosadíme do rovnice druhé.

$$
-\frac{24}{\left(\sqrt{\frac{28}{3}}\right)^3} = \cos(3\alpha)
$$

Za pomoci kalkulačky získáme šest přibližných řešení pro úhel $\alpha \in [0{,}2\pi)$.

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &\approx 0.85707 & \alpha_2 &= \frac{2\pi}{3} - \alpha_1\\
\alpha_3 &= \alpha_1 + \frac{2\pi}{3} & \alpha_4 &= -\alpha_1 + \frac{4\pi}{3}\\
\alpha_5 &= \alpha_1 + \frac{4\pi}{3} & \alpha_6 &= -\alpha_1 + 2\pi
\end{aligned}
$$

Dosazením do substitučního vztahu $x = t\cos(\alpha)$ dostaneme přibližná řešení rovnice. Stačí dosadit hodnoty α_1, α_2 a α_3. Další dosazování je zbytečné, neboť platí: $\alpha_6 = 2\pi - \alpha_1$, což odpovídání převedení úhlu do čtvrtého kvadrantu, proto platí $cos(\alpha_1) = cos(\alpha_6)$. Obdobné vztahy dostaneme také pro α_4 a α_5.

$$
\begin{aligned}
x_1 &\approx \sqrt{\frac{28}{3}}\cos(0.85707) \approx\ 2\\
x_2 &\approx \sqrt{\frac{28}{3}}\cos(1.23732) \approx\ 1\\
x_3 &\approx \sqrt{\frac{28}{3}}\cos(2.95147) \approx -3
\end{aligned}
$$

Získaná řešení se shodují se zvolenými kořeny rovnice $x^3 = 7x - 6$. Při práci s kubickou rovnicí jsme čerpali z [13].

4.3 Základní věta algebry

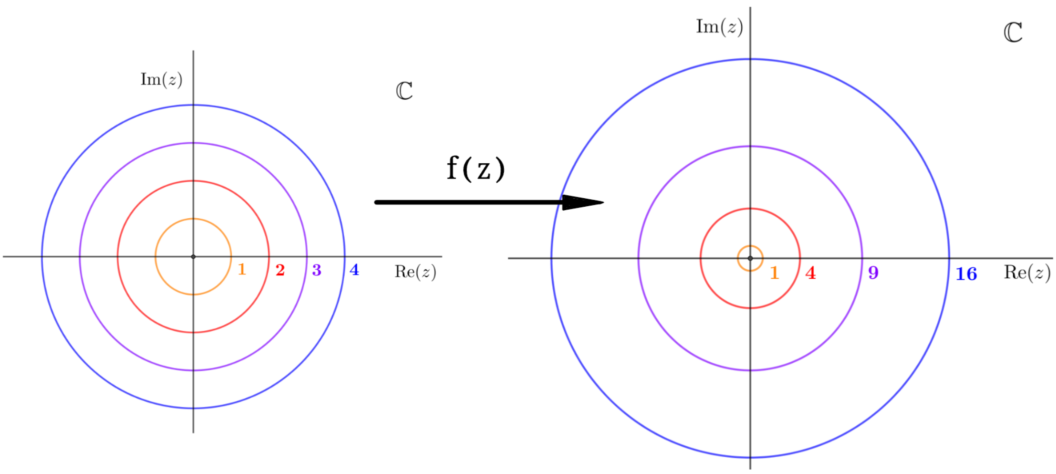
Základní věta algebry popisuje jednu z důležitých vlastností oboru komplexních čísel a polynomů. V dnešní době studium rovnic a polynomů již není ústředním tématem algebry, nicméně stále se jedná o velmi důležité tvrzení. Při rozboru této věty budeme nahlížet na polynomy jako na funkce komplexní proměnné. Uvažujme polynom $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, tento polynom chápejme jako polynomiální funkci $f(z)$. Pak základní věta algebry říká:

Věta 5 (Základní věta algebry)**.** *Oborem hodnot každé nekonstantní komplexní polynomiální funkce jsou všechna komplexní čísla.*

Existují různé formulace základní věty algebry. My se v této kapitole pokusíme větu spíše ukázat než dokázat, a proto použijeme výše uvedenou formulaci. Ta nám jinými slovy říká, že polynomy zobrazí komplexní rovinu opět na celou komplexní rovinu. To mimo jiné znamená, že každý nekonstantní polynom má v komplexních číslech kořen, protože podle základní věty algebry jistě existuje komplexní číslo, které se zobrazí na nulu.

Věta 6 (Alternativní znění základní věty algebry)**.** *Každý nekonstantní polynom má v oboru komplexních čísel kořen.*

Nejdříve se podíváme na chování polynomiálních funkcí ve tvaru $f(z) = z^n$. V minulých kapitolách jsme se přesvědčili, že pokud z probíhá kružnici $|z| = R$, pak $f(z)$ probíhá kružnici komplexních čísel o poloměru R^n. Zřejmě pro každé nenulové komplexní číslo w nalezneme kružnici o poloměru R se středem v počátku, která prochází obrazem komplexního čísla w. Bude-li z probíhat kružnici o poloměru $\sqrt[n]{R}$, potom $f(z)$ projde $n-$krát kružnici o poloměru R. Proto musí existovat komplexní číslo, které se zobrazí na číslo w. Nula se při zobrazení $f(z) = z^n$ zobrazí opět na nulu. Tím máme ověřenu platnost základní věty algebry pro polynomiální funkce ve tvaru $f(z) = z^n$. Jelikož násobení komplexním číslem odpovídá složení stejnolehlosti a rotace, musí platit základní věta algebry i pro polynomy ve tvaru $f(z) = az^n$. Následující obrázek ukazuje několik kružnic zobrazených funkcí z^2.



Obrázek 4.4: Zobrazení kružnic při $f(z) = z^2$

4.3.1 Obecné polynomy

Dále ukážeme platnost základní věty algebry i pro obecné polynomiální funkce. Nejedná se o úplný a přesný důkaz, pouze naznačíme jeho podstatné myšlenky. Uvažujme polynomy ve tvaru:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ a $a_n \neq 0$.

Pro začátek je dobré si uvědomit, jaký bude obraz nuly při $f(z)$. Jednoduchým výpočtem zjistíme, že obrazem bude absolutní člen polynomu.

$$f(0) = a_n 0^n + a_{n-1} 0^{n-1} + ... + a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 = a_0$$

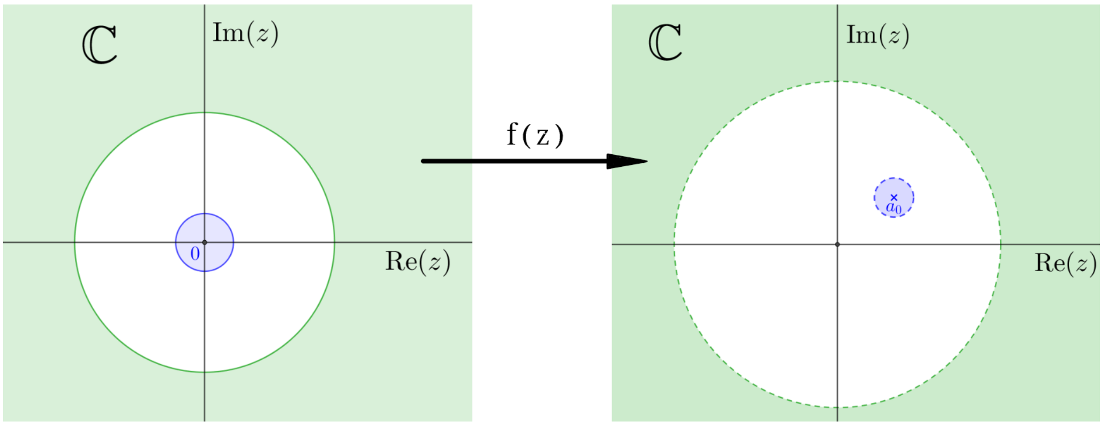
Dále můžeme odhadnout, co bude obrazem, pokud při $f(z)$ bude z probíhat kružnice s velmi malým, nebo naopak s velmi velkým poloměrem. Pokud z probíhá kružnice s velmi velkým poloměrem R, ukážeme si, jak se bude chovat $f(z)$.

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \approx a_n z^n,$$

Vedoucí člen polynomu přeroste zbylé členy, proto $f(z)$ bude probíhat křivku, která se blíží kružnici o poloměru $|a_n|R^n$ se středem v počátku. Obdobně můžeme odhadnout obraz $f(z)$, bude-li z probíhat kružnici o velmi malém poloměru r [10].

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \approx a_1 z + a_0$$

Tentokrát členy polynomu s vyšší mocninou budou naprosto zanedbatelné velikosti, proto $f(z)$ bude probíhat křivku blížící se kružnici o poloměru $|a_1|r$ se středem v a_0. Pro r blížící se k nule kružnice konverguje do jediného bodu a_0.



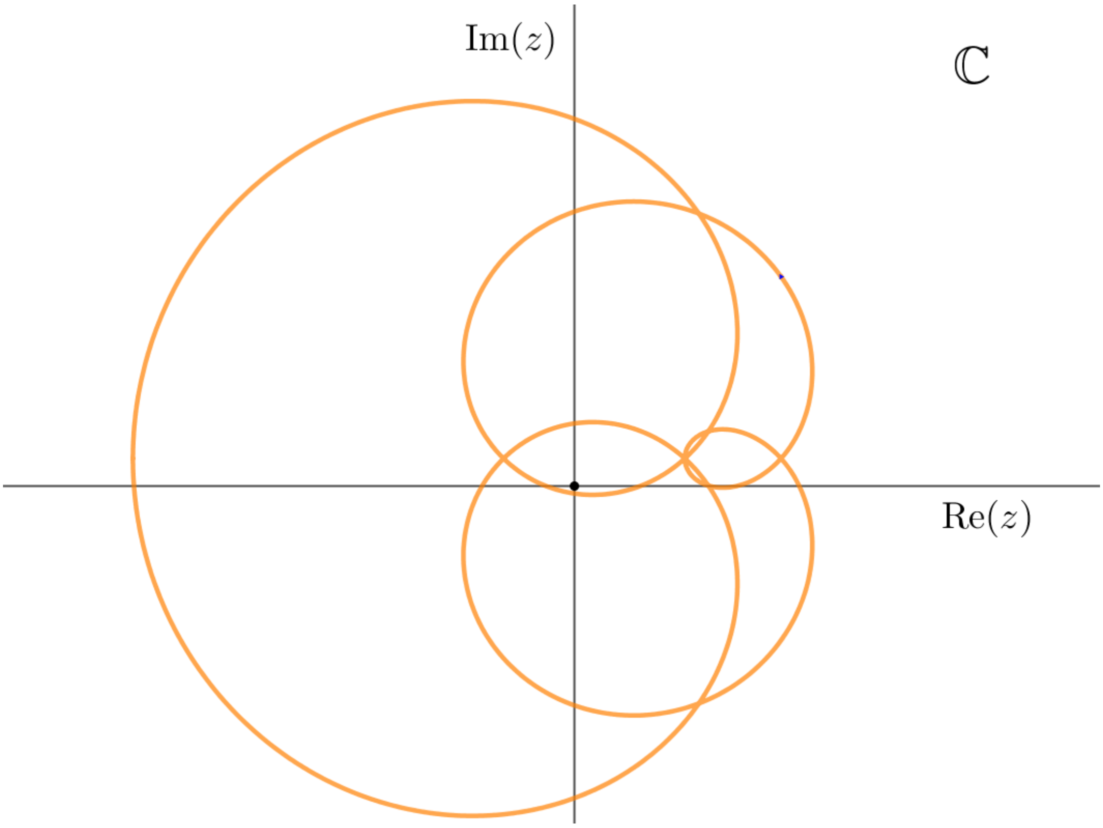
Obrázek 4.5: Věta o mezikruží

[10] Řádově menším než jedna.

Když už se funkce $f(z)$ chová téměř jako kružnice, můžeme použít stejnou úvahu jako pro funkce ve tvaru $f(z) = az^n$. Obrázek 4.5 shrnuje dosavadní poznatky. Zelená část roviny se zobrazí na zelenou část roviny[11] a modrá část roviny se zobrazí na modrou část roviny[12].

Poznámka. Z obrázku 4.5 můžeme vypozorovat jednoho známé matematické tvrzení. Pokud bychom hledali kořen polynomu $f(z)$, obrázek napovídá, že stačí prohledat hodnoty mezi modrou a zelenou kružnicí. Tento výsledek je označován jako věta o mezikruží. Aby byl užitečný, museli bychom co nejlépe odhadnout velikosti kružnic.

Zbývá vyřešit, jak bude vypadat $f(z)$, bude-li z probíhat libovolnou kružnici z bílého mezikruží. Obrazy takových kružnic mohou vypadat velmi různorodě. Na obrázku 4.6 je znázorněno, jakou křivku vykreslí $f(z)$, probíhá-li z kružnici o poloměru 1.



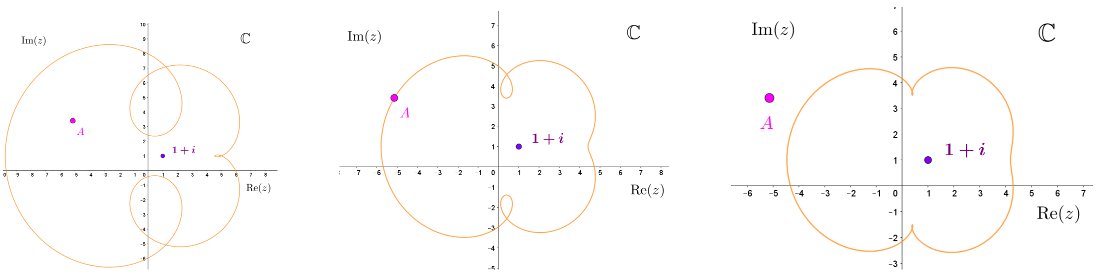
Obrázek 4.6: Obraz jednotkové kružnice při $f(z) = z^5 - 6z^4 + 3z^3 - z^2 + 6z + 1 + i$

Tato křivka se různě deformuje v závislosti na tom, jak velkou kružnici z probíhá. Navzdory všem deformacím zůstanou zachovány dvě důležité vlastnosti. Křivka bude vždy uzavřená a spojitá. Zjednodušeně to znamená, že se křivka nikdy nerozpojí. Zároveň víme, že při zmenšujícím se $|z|$ se křivka postupně blíží k bodu, který odpovídá absolutnímu členu polynomu. To ale znamená, že libovolné číslo a, jehož obraz A leží v bílém mezikruží, je „chyceno“ pomalu se

[11] To odpovídá zobrazování kružnic s velkým poloměrem.

[12] To odpovídá zobrazování kružnic s malým poloměrem

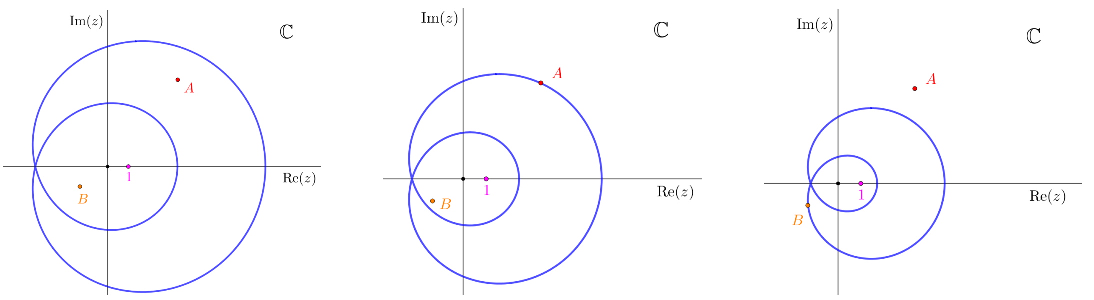
deformující křivkou, která dříve či později nutně musí procházet bodem A, jelikož se sama přibližuje jedinému bodu. Prochází-li křivka bodem A, pak nutně musí existovat jeho vzor při zobrazení f. Jelikož jsme zvolili číslo a libovolně, musí to platit pro každé každé číslo. Tím jsme ukázali, že každé komplexní číslo při zobrazení f má vzor, čímž je demonstrace základní věty algebry dovršena. Následující tři obrázky ukazují, že křivka $f(z)$ musí alespoň jednou projít bodem A.



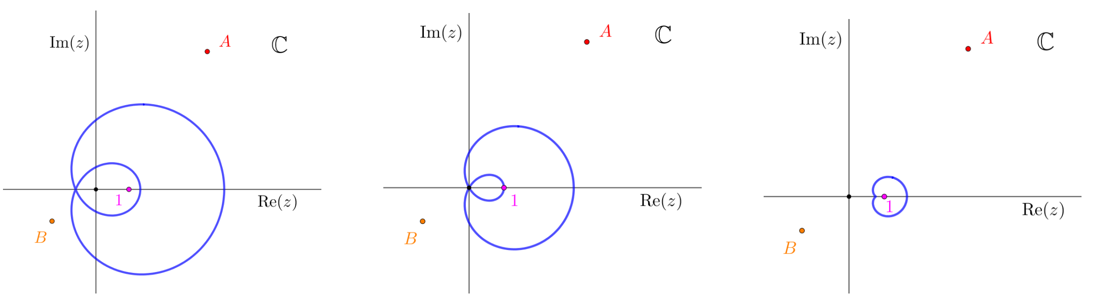
(a) |z|=0.84 (b) |z|=0.67 (c) |z|=0.6

Obrázek 4.7: Deformující se křivka $f(z) = z^5 - 6z^4 + 3z^3 - z^2 + 6z + 1 + i$ v závislosti na zmenšující se hodnotě $|z|$

Následující obrázky ukazují, jak se průběžně deformuje křivka polynomiální funkce $f(z) = z^2 + z + 1$, probíhá-li z postupně kružnice o zmenšujících se poloměrech.



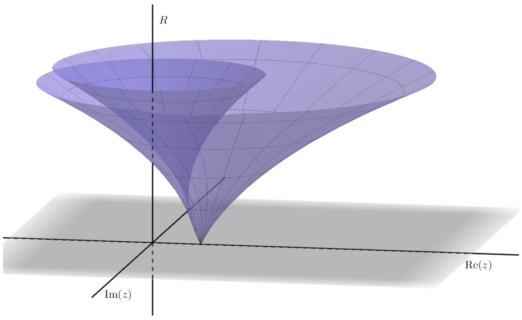
(a) |z|=2 (b) |z|=1.8 (c) |z|=1.7



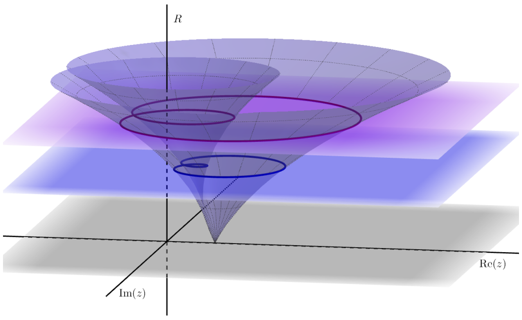
(d) |z|=1.33 (e) |z|=1 (f) |z|=0.44

Obrázek 4.8: Deformující se křivka $f(z) = z^2 + z + 1$ v závislosti na zmenšující se hodnotě $|z|$

Pro názornost můžeme všechny obrázky 4.8 spojit do jediného tak, abychom mohli pozorovat plynule se měnící křivku. Uvažujme nyní plochu S nad Gaussovou rovinou. Každý její řez rovinou, která je kolmá k vertikální ose ve výšce R odpovídá křivce, která vznikne funkcí $f(z)$, probíhá-li z kružnici o poloměru R. Obrázky 4.9 ukazují plochu, kterou by vytvořila funkce $f(z) = z^2 + z + 1$. Na řezech v obrázku (b) vidíme křivky, které odpovídají rovinným křivkám z obrázku 4.8.



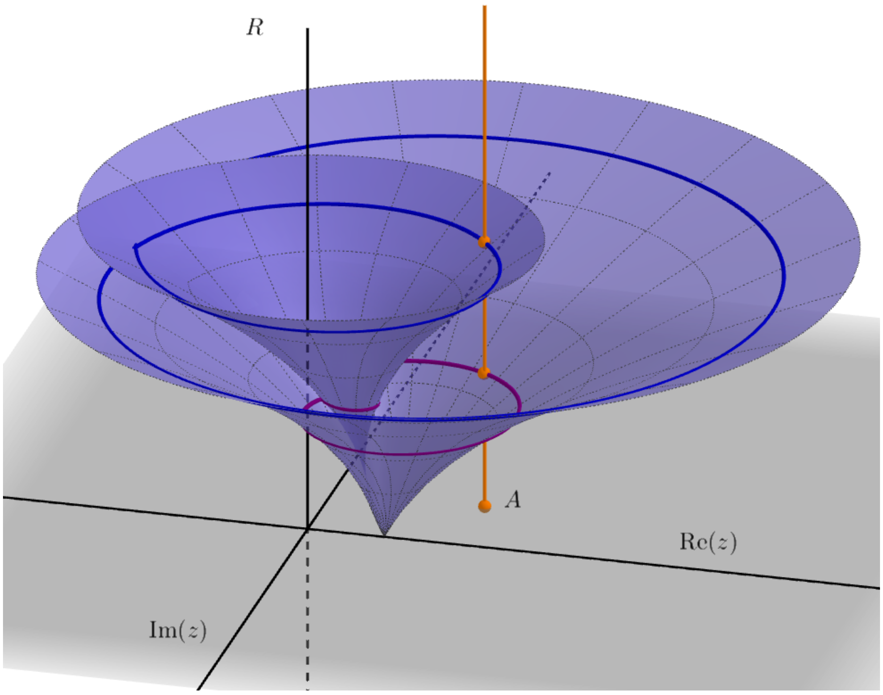
(a) Plocha S



(b) Řezy rovinami kolmými k veritkální ose

Obrázek 4.9: Plocha S daná funkcí $f(z) = z^2 + z + 1$

Pokud bychom chtěli nyní ukázat, že pro libovolné číslo komplexní roviny existuje vzor, odpovídá to nalezení průsečíku rovnoběžky s vertikální osou s plochou S, což znázorňuje obrázek 4.10.



Obrázek 4.10: Plocha S odpovídající funkci $f(z) = z^2 + z + 1$

Na obrázku jsme nalezli dokonce dva různé průsečíky s plochou S, což odpovídá počtu řešení kvadratické rovnice $a = z^2 + z + 1$, kde A je obrazem komplexního čísla a. Takovýto důkaz základní věty algebry může být proveden i formálně, jeho autorem je Mike Hishhorn. [14] Jeho důkaz je do značné míry inspirován prvním důkazem základní věty algebry, který publikoval C. F. Gauss v roce 1799. [12]

5. Exponenciální funkce

V této kapitole krátce a názorně probereme několik základních informací o komplexní exponenciální funkci. Pokusíme se vysvětlit její geometrické chování a trochu nastíníme, proč je zrovna tato elementární funkce tak významná.

Poznámka. V oboru reálných čísel bylo zvykem rozlišovat exponenciální funkce dle základu. V oboru komplexních čísel tomu nebude jinak, až na konvenci, že pokud základ exponenciální funkce není upřesněn, počítá se s tím, že se jedná o exponenciální funkci o základu Eulerova čísla e. Připomeňme proto definici čísla e.

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{5.1}$$

Podobně můžeme také definovat reálnou exponenciální funkci.

$$e^x := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \tag{5.2}$$

Hlubší poznatky týkající se komplexních čísel se neobejdou bez exponenciální funkce, která je se svými vlastnostmi v mnoha oblastech matematiky zcela nepostradatelná. Dle slov Waltera Rudina[1] se dokonce jedná o nejdůležitější matematickou funkci. Abychom jí správně porozuměli, je třeba si nejdříve rozmyslet, jak spočítat funkční hodnoty exponenciální funkce a jak je znázornit.

V oboru reálných čísel má exponenciální funkce poměrně očekávané vlastnosti, dané vlastnostmi násobení.

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

Další charakteristickou vlastností exponenciální funkce je funkční hodnota v bodě 0.

$$e^0 = 1$$

Naším cílem je rozšířit tuto funkci na obor komplexních čísel. Než to ale provedeme, musíme nejdříve vyřešit jeden značně netriviální problém, není totiž vůbec zřejmé, jak bychom měli definovat mocninu, jejímž exponentem je komplexní číslo. To nám zajistí identita známá jako Eulerův vzorec.

5.1 Eulerův vzorec

Při studiu komplexních čísel matematici narazili na jeden z nejpozoruhodnějších matematických vzorců, který je dnes znám jako Eulerův vzorec.

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{5.3}$$

[1] Profesor matematiky a autor známé učebnice matematické analýzy

Tato krátká, elegantní, leč velmi složitá identita propojuje několik významných matematických konstant, které na první pohled nemají mnoho společného, ale díky komplexním číslům je můžeme vzájemně provázat. V této sekci se podíváme, jak tento vztah odvodit.

Pro příjemnější čtení textu bude vhodné zavést následující značení.

$$\mathrm{cis}(\alpha) := \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

Nejdříve se blíže podíváme na to, jak se funkce $\mathrm{cis}(\alpha)$ chová. Jednu velice důležitou vlastnost objevíme použitím vzorce 2.24. S nově zavedeným značením vztah přeformulujeme do následující podoby:

$$\begin{aligned}\mathrm{cis}(\alpha)\cdot\mathrm{cis}(\beta) &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta) = \\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = \\ &= \mathrm{cis}(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

Pro lepší představu o chování funkce $\mathrm{cis}(\alpha)$ si spočtěme funkční hodnotu v bodě 0.

$$\mathrm{cis}(0) = \cos(0) + i\sin(0) = 1$$

Nyní už někteří z vás jistě tuší, že funkce $\mathrm{cis}(\alpha)$ je jenom upravená exponenciální funkce, což můžeme pozorovat na níže uvedených vlastnostech.

- $a^0 = 1$
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

- $\mathrm{cis}(0) = 1$
- $\mathrm{cis}(\alpha+\beta) = \mathrm{cis}(\alpha)\cdot\mathrm{cis}(\beta)$

Toto tušení je správné, zbývá už jen zjistit, jaký je základ této exponenciální funkce. Dosazením se pokusíme spočítat, o jaký základ se jedná. Dosaďme do funkce $\mathrm{cis}(\alpha)$ hodnotu π.

$$a^\pi = \mathrm{cis}(\pi) = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 \tag{5.4}$$

Z tohoto výsledku nejsme příliš nadšeni, neboť víme, že reálná exponenciální funkce je kladná pro každé $x \in \mathbb{R}$, proto mezi reálnými čísly žádné řešení nenalezneme. Mohla by výše uvedená rovnice platit, pokud bychom uvažovali $a \in \mathbb{C}$? Mohla by exponenciální funkce nabývat i záporných hodnot? Výsledek můžeme uhodnout. Chceme, aby $a^\pi = i^2$, dosazením $a = i^{\frac{2}{\pi}}$ dostaneme výsledek.

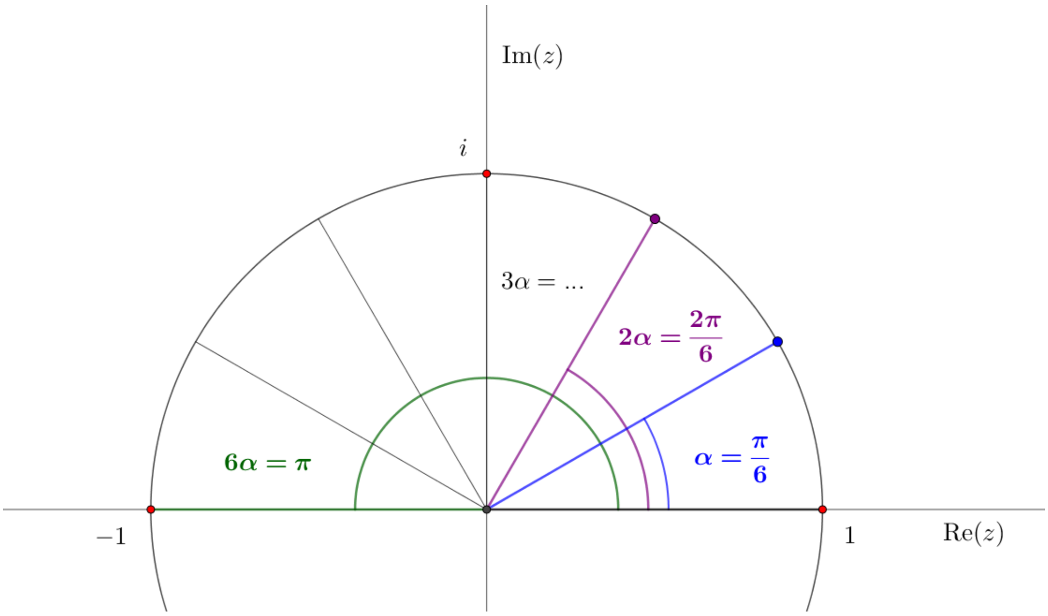
$$a^\pi = (i^{\frac{2}{\pi}})^\pi = i^2 = -1$$

Vidíme, že v komplexních číslech lze uvažovat řešení rovnice 5.4, a dokonce jsme takové řešení nalezli: $a = i^{\frac{2}{\pi}}$, ale pro další využití není příliš vhodné[2]. Nicméně už víme, že má smysl takové řešení hledat, a proto se nyní pokusíme vymyslet jiný způsob odvození hledaného základu a.

[2]Úprava tohoto výrazu vyžaduje pokročilé znalosti.

Využijeme toho, že je nám dobře známa geometrická interpretace násobení komplexních čísel. Jedná se o stejnolehlost a rotaci, a pokud zvolíme komplexní čísla přímo na jednotkové kružnici, bude koeficient stejnolehlosti 1, a v tomto případě můžeme násobení komplexních čísel znázornit jen jako rotaci. Jelikož umocňování čísla je opakované násobení, znázorníme mocninu jako opakovanou rotaci o stejný úhel. Podívejme se, jak vypadá umocňování komplexního čísla $z = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$. Snadno nahlédneme, že platí:

$$z^n = \left(cos\frac{\pi}{n} + isin\frac{\pi}{n}\right)^n = -1 \tag{5.5}$$



Obrázek 5.1: Vztah 5.5 pro $n = 6$

Číslo z n-krát vynásobíme samo se sebou, neboli n-krát otočíme o úhel $\frac{\pi}{n}$. Při posledním otočení se dostane do čísla -1. Pro dostatečně velké n můžeme použít odhady funkcí $\sin(\frac{\pi}{n})$ a $\cos(\frac{\pi}{n})$, neboť jejich argumenty se budou blížit k nule.

$$\left.\begin{aligned}\sin(x) &\approx x\\ \cos(x) &\approx 1\end{aligned}\right\}\quad \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n} \approx 1 + \frac{i\pi}{n}$$

Počítejme dále s tímto odhadem pro velké hodnoty n, neboli pro velmi malé hodnoty argumentu $\frac{\pi}{n}$.

$$z^n = \left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right)^n \approx \left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n$$

Na pravé straně se objevil výraz, jenž nápadně připomíná definici Eulerova čísla e, respektive exponenciální funkce. Pro $n \to \infty$ dostaneme:[3]

$$-1 = \lim_{n\to\infty} z^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{i\pi}{n}\right)^n = e^{i\pi} = (e^i)^\pi$$

[3]Formální odůvodnění druhé rovnosti je relativně složité, předpokládejme platnost na základě odhadů funkčních hodnot goniometrických funkcí.

Hledaný základ a naší exponenciely je číslo e^i. Přičtením jedné na obě strany rovnosti ihned dostáváme Eulerův vzorec.

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{5.6}$$

Krom tohoto hezkého vzorce se nám také podařilo vyjádřit funkci $\text{cis}(\alpha)$ jako exponenciální funkci o základu e^i. Platí:

$$\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = \text{cis}(\alpha) = e^{i\alpha} \tag{5.7}$$

Tento výsledek ihned použijeme, ukážeme si, že exponenciální funkcí můžeme vyjádřit libovolné nenulové komplexní číslo. Uvažujme komplexní číslo z v goniometrickém tvaru, dosazením 5.7 dostaneme:

$$z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = |z|e^{i\alpha} \tag{5.8}$$

Takové vyjádření nazýváme *exponenciálním tvarem komplexního čísla.*

Definice 10 (Exponenciální tvar komplexního čísla)**.** *Exponenciální tvar nenulového komplexního čísla z je výraz $|z|e^{i\phi}$, kde $|z|$ je velikost komplexního čísla a ϕ je jeho argument.*

$$z = |z|e^{i\phi}$$

Příklad 17. *Vyjádřete čísla $3i$ a $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ v goniometrickém a exponenciálním tvaru.*

Řešení. Argument čísla $3i$ je $\frac{\pi}{2}$, absolutní hodnota čísla $3i$ je 3, proto můžeme rovnou zapsat výsledek jako:

$$3i = 3\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Absolutní hodnota čísla $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ je rovna $\sqrt{2+2} = 2$, argument α zřejmě nalezneme v prvním kvadrantu z rovnice:

$$\cos\alpha = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Vyjádření čísla $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ v goniometrickém a exponenciálním tvaru je:

$$\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big) = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

5.2 Geometrický význam imaginární mocniny

Od začátku této práce se snažíme o geometrické znázornění komplexních čísel a jejich operací. Sčítání odpovídá součtu vektorů, násobení odpovídá složení rotace a stejnolehlosti, proto není překvapením, že i umocňování komplexních čísel můžeme chápat jako složení rotace se stejnolehlostí. Teprve nyní víme, jak se vypořádat s exponenciální funkcí, která je definovaná pro libovolné komplexní číslo.

Uvažujme funkci $f(z) = e^z$ s definičním oborem $\mathbb{C}$. Dosaďme do funkce f libovolné komplexní číslo $z = a + bi$, pak platí:

$$f(z) = f(a + bi) = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$$

Výraz e^a je reálným číslem. Vynásobení tímto číslem proto odpovídá stejnolehlosti. Zajímavější je výraz e^{bi}, který dle vzorce 5.7 odpovídá rotaci o b radiánů.

Je dobré si uvědomit, proč je vhodné definovat exponenciální funkci zrovna o základu e. Pro matematickou analýzu je tato volba nejvýhodnější z důvodu diferenciálního a integrálního počtu, neboť exponenciální funkce o tomto základu oplývá mnoha vlastnostmi, které jsou vzájemně propojeny, nicméně i při geometrické interpretaci tuto volbu musíme náležitě ocenit. Co by se stalo, kdybychom uvažovali exponenciální funkci o základu například 2?

$$2^{i\alpha} = e^{i\alpha \ln 2} = \cos(\alpha \ln 2) + i \sin(\alpha \ln 2) \tag{5.9}$$

Při úpravě výrazu 5.9 jsme ukázali, že i pro exponenciální funkce s jiným základem můžeme výpočet znázornit jako rotaci a stejnolehlost, ale bohužel rotace nebude o úhel α. V tomto případě se jedná o rotaci o úhel $(\ln 2)\alpha$ radiánů. Jistě uznáte, že mnohem rozumnější volbou pro vyjádření komplexních čísel je exponenciální funkce o základu e.

Exponenciální funkce je ideálním nástrojem pro úpravy výrazů, počítání odmocnin a řešení binomických rovnic, jelikož můžeme velmi zestručnit zápis. Například Moivreovu větu můžeme zapsat takto:

$$\left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{in\alpha}$$

Moivreova věta přepsaná pomocí exponenciálního tvaru komplexního čísla už nevypadá zdaleka tak zajímavě jako v goniometrickém tvaru, jelikož přímo vyplývá z vlastností exponenciální funkce. Podobně můžeme zestručnit mnohé další výsledky z předchozích kapitol. Uveďme například vzorec 2.26 pro výpočet podílu komplexních čísel, který je pro komplexní čísla v exponenciálním tvaru naprosto zjevný.

$$\frac{|z|e^{i\alpha}}{|w|e^{i\beta}} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\alpha-\beta)}$$

Příklad 18. *Vyřešte rovnici a výsledky zapište v exponenciálním tvaru.*

$$z^4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

Řešení. Na pravé straně je komplexní jednotka s argumentem $\frac{\pi}{4}$, proto množina řešení rovnice (viz. 4.4) je:

$$K = \{e^{\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}},\ k \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}\}$$

Použitím 2.39 dostaneme pro $x \in \mathbb{R}$ následující vztahy vyjadřující goniometrické funkce pomocí exponenciální funkce.

$$\mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x) \tag{5.10}$$

$$\mathrm{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin(x) \tag{5.11}$$

Výše uvedené vztahy se často berou jako definice goniometrických funkcí. V tuto chvíli by se však jednalo o definici kruhem, neboť exponenciální funkci umíme zavést pouze za pomoci Eulerova vzorce, právě díky goniometrickým funkcím. Proto výše uvedené vztahy chápejme zatím jen jako zajímavé propojení elementárních funkcí.

5.3 Zavedení exponenciální funkce

V závěru této kapitoly definujeme exponenciální funkci tak, jak se obvykle zavádí při studiu komplexní analýzy. Než tak učiníme, rozmyslíme si jeden příklad, který se ukáže být nepostradatelným při dalším studiu.

5.3.1 Součet geometrické řady

Uvažujme geometrickou řadu reálných čísel $1 + x + x^2 ...$, kde $x \in (-1,\ 1)$. Známým trikem můžeme odvodit součet této řady.

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + x + x^2 ... + x^{n-1} + x^n \\ xS_n &= \phantom{1 + {}} x + x^2 ... + x^{n-1} + x^n + x^{n+1} \end{aligned}$$

Rovnice odečteme

$$S_n - xS_n = 1 - x^{n+1}$$

Vytkneme S_n a po vydělení výrazem $(1 - x)$ dostaneme vzorec pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti.

$$S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{5.12}$$

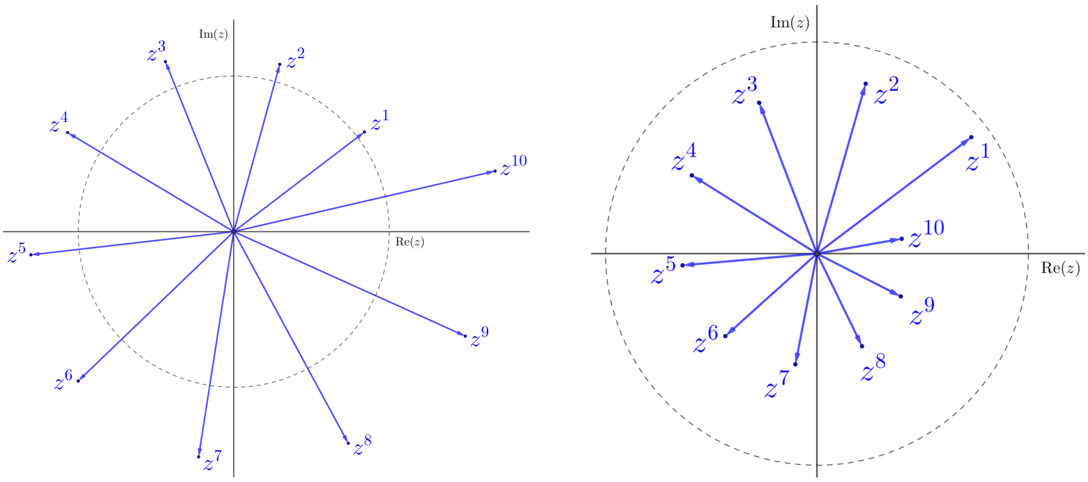
Limitním procesem pro $n \to \infty$ dostaneme vzorec pro součet nekonečné geometrické řady

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x} \tag{5.13}$$

Až do této chvíle jsme pracovali s reálnými čísly, nicméně pro komplexní čísla můžeme provést tytéž úpravy, a proto tento vzorec snadno rozšíříme i pro obor čísel komplexních.

Doposud jsme ale neupřesnili, kdy geometrická řada konverguje k uvedenému součtu. V oboru reálných čísel je to snadné, stačí uvažovat $x \in (-1{,}1)$. Pro která komplexní čísla bude řada konvergovat?

Stačí si představit, jak vypadají mocniny komplexního čísla. Číslo postupně otáčíme kolem nuly a zároveň umocňujeme absolutní hodnotu komplexního čísla, jak ukazuje následující obrázek 5.2.

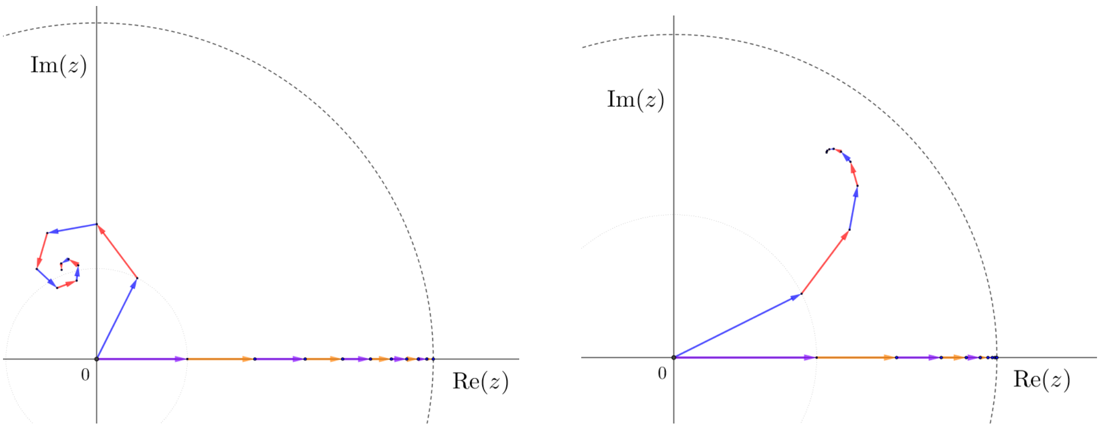


(a) $z = 0.84 + 0.64i$ (b) $z = 0.73 + 0.55i$

Obrázek 5.2: Mocniny komplexního čísla z

Obrázek 5.2 (a) ukazuje mocniny komplexního čísla, které má absolutní hodnotu větší než jedna. Obrázek (b) ukazuje mocniny komplexního čísla, které má absolutní hodnotu menší než jedna. Mocniny komplexní jednotky by svou absolutní hodnotu neměnily.

Na obrázku 5.3 je porovnán součet geometrické posloupnosti pro kladné reálné číslo x a pro komplexní číslo z se stejnou absolutní hodnotou. Jednotlivé mocniny komplexních čísel vektorově sečteme. Z trojúhelníkové nerovnosti je hned zřejmé, že pokud řada konverguje pro kladné reálné číslo x, pak bude konvergovat i pro všechna komplexní čísla, která mají stejnou nebo menší absolutní hodnotu.



(a) $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ a $z = \frac{1}{3} + \frac{2i}{3}$ (b) $x = \frac{\sqrt{5}}{4}$ a $z = \frac{1}{2} + \frac{i}{4}$

Obrázek 5.3: Součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti pro $x \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{C}$

Podobným způsobem zdůvodníme konvergenci obecné komplexní mocninné řady. Jelikož konvergence pro kladné reálné číslo implikuje konvergenci mocninné řady pro každé komplexní číslo se stejnou nebo s menší absolutní hodnotou, můžeme množinu komplexních čísel, pro která řada konverguje, znázornit jako kruh. Největší reálné číslo, pro které platí, že pro libovolné komplexní číslo s menší absolutní hodnotou řada konverguje, se nazývá poloměr konvergence.[4]

V našem příkladu s geometrickou řadou by byl poloměr konvergence jedna, neboť pro každé komplexní číslo s absolutní hodnotou menší než jedna bude řada konvergovat.

5.3.2 Definice exponenciální funkce

Při zavedení exponenciální funkce musíme využít složitějších výsledků matematické analýzy. Využijeme Taylorovu řadu funkce e^x.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{5.14}$$

Tato řada konverguje pro každé reálné číslo, proto řada konverguje i pro každé komplexní číslo. Využijeme této řady k definici exponenciální funkce komplexní proměnné.

Definice 11. *Pro libovolné komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ definujme exponenciální funkci mocninnou řadou*

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{5.15}$$

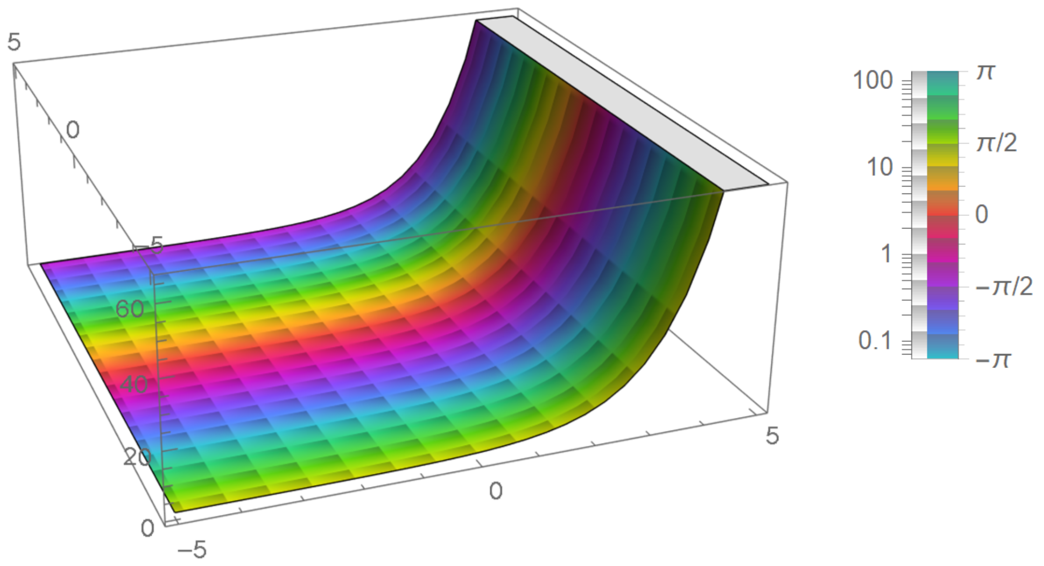
S touto definicí exponenciální funkce můžeme využít vztahy 5.10, 5.11 a definovat goniometrické funkce pomocí funkce exponenciální.

Na závěr ukážeme, jak se dá komplexní funkce znázornit. Znázorňování komplexních funkcí je poměrně složité, protože přiřazuje dvourozměrné komplexní rovině čísla z dvourozměrné komplexní roviny. Pro nakreslení grafu bychom potřebovali čtyři dimenze.

Místo funkční hodnoty jsme v grafu vyznačili absolutní hodnotu funkční hodnoty. Abychom neztratili informace o funkční hodnotě, obarvili jsme graf. Barva grafu zachycuje argument funkční hodnoty. Funkční hodnota je tedy vyjádřena pomocí absolutní hodnoty a argumentu v podobě obarvení grafu. Všimněte si například, že komplexní exponenciální funkce je periodická s periodou $2\pi i$, což ověříme použitím Eulerova vzorce.

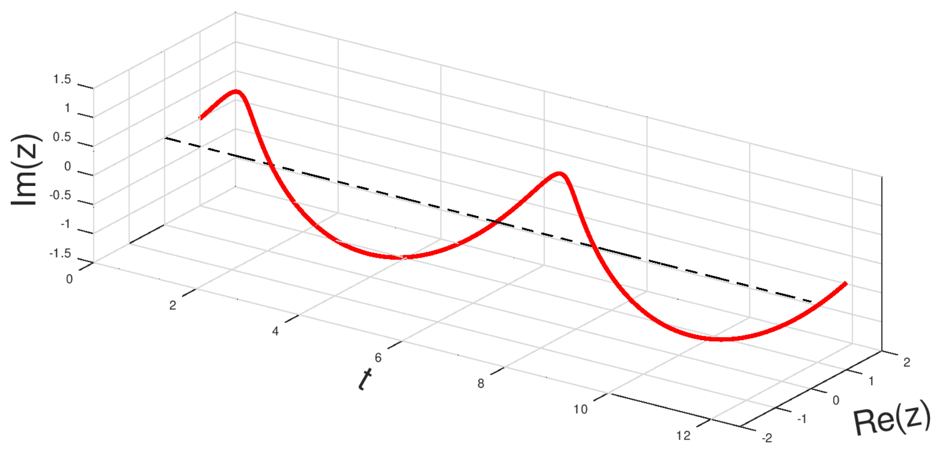
$$e^{z+2i\pi} = e^z e^{2i\pi} = e^z (e^{i\pi})^2 = e^z (-1)^2 = e^z$$

[4] Jelikož jde o text určený studentům středních škol, záměrně zde nepoužíváme termín supremum.



Obrázek 5.4: Graf funkce e^z

Pokud bychom samostatně uvažovali funkci e^{it}, kde za t bereme pouze reálná čísla, dostaneme v komplexní rovině kružnici, kterou budeme probíhat v kladném směru stále dokola. Kdybychom bodům kružnice přidali třetí souřadnici, která by odpovídala hodnotě parametru t, dostali bychom parametrizovanou šroubovici, která je znázorněna na obrázku 5.5.



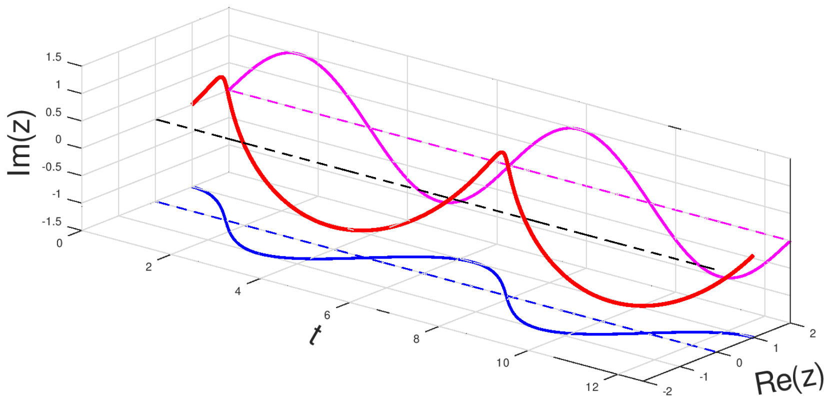
Obrázek 5.5: Šroubovice

Připomeňme si, jak jsme zavedli vztahy, které vyjadřovaly goniometrické funkce pomocí exponenciální funkce. Nyní je můžeme chápat jako definice.

$$\cos(t) := \mathrm{Re}(e^{it}) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$\sin(t) := \mathrm{Im}(e^{it}) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

V našem grafu to odpovídá pravoúhlým průmětům šroubovice, jak je ukázáno na obrázku 5.6.



Obrázek 5.6: Definice goniometrických funkcí

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit učební text na téma komplexních čísel, určený pro čtenáře vyšších ročníků gymnázií a prvních ročníků vysokých škol. Práce se zaměřuje na geometrické pojetí komplexních čísel, které je vhodné pro seznámení se s tímto číselným oborem. Pokusili jsem se ukázat, že studium komplexních čísel může být pro studenty velmi zajímavé a bylo by velkým zjednodušením považovat je například jenom za vhodný prostředek k řešení kvadratických rovnic, ač jsou tak na středních školách někdy zjednodušeně prezentována.

Na rozdíl od běžných středoškolských materiálů se čtenář v této práci seznámí také s hlubšími poznatky z algebry a matematické analýzy, které jsou zde vysvětleny tak, aby je čtenář mohl pochopit bez pokročilé znalosti matematiky. Práce by měla čtenáře přesvědčit, že při studiu komplexních lze dojít k pozoruhodným výsledkům, jako například odvození jednoduchého vzorec pro výpočet obsahu pravidelného n-úhelníku nebo Heronova vzorce. K zajímavým závěrům vede i geometrická interpretace komplexních čísel, na základě které jsme vyřešili problém hledání pythagorejských trojic a seznámili jsme se se slavným Eulerovým vzorcem. To vše by mělo čtenáře podnítit k dalšímu studiu.

Práce zdaleka nevyčerpala všechna témata, která by byla vhodná pro rozšíření středoškolské látky. Zajímavé by například bylo propojení lineární algebry a komplexních čísel či rozšíření látky o kruhovou inverzi a propojení s neeukleidovskou geometrií.

Věříme, že takto podaný výklad přispěje k tomu, aby byl obor komplexních čísel pro žáky i studenty smysluplný a lépe představitelný.

Seznam použité literatury

[1] Robová J., Hála M., Calda E. *Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika.* První vydání. Prometheus, Praha, 2013.

[2] Markuševič A. I. *Komplexní čísla a konformní zobrazení.* Druhé opravené vydání. Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1957. Dostupné také z: `https://ndk.cz/uuid/uuid:1373da00-418a-11e5-a525-5ef3fc9ae867`.

[3] Polák J. *Přehled středoškolské matematiky.* Desáté vydání. Prometheus, Praha, 2015.

[4] Dlab V., Bečvář J. *Od aritmetiky k abstraktní algebře.* První vydání. Matfyzpress, Praha, 2016.

[5] Rudin W. *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Academia, Praha, 2003.

[6] Needham T. *Visual complex analysis.* Clarendon Press Oxford University Press, Oxford New York, 1997.

[7] B. Butterworth. What happens when you can't count past four? `https://www.theguardian.com/education/2004/oct/21/research.highereducation1`, 2004. [cit.; 19-5-2021].

[8] Wikipedia contributors. Complex conjugate root theorem Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Complex_conjugate_root_theorem&oldid=986583597`, 2020. [cit. 4-5-2021].

[9] Edwards M. D. A proof of heron's formula. *The American Mathematical Monthly*, 114(10):937, 2007.

[10] Andreescu T., Andrica D. *Complex numbers from A to...Z.* Birkhäuser, Boston, 2004.

[11] Řeháček J. Matykání xxii: Jak si nabrnkat pythagorejské trojice. `https://www.matfyz.cz/clanky/matykani-xxii-jak-si-nabrnkat-pythagorejske-trojice`. [cit. 7-5-2021].

[12] Stillwell J. *Mathematics and Its History.* third edition. Springer, San Francisco, 2010.

[13] Weyr E. Casus irreducibilis. *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, 22(4):257–259, 1893.

[14] Hirschhorn M. D. The fundamental theorem of algebra. *The College Mathematics Journal*, 29(4):276–277, 1998.

Seznam obrázků

2.1 Znázornění celých čísel orientovanými úsečkami 4
2.2 $2 + 3 = 5$ 4
2.3 $2 + (-1) = 1$ 4
2.4 $(-1) \cdot 2 = -2$ 5
2.5 Reálná a imaginární osa 6
2.6 Komplexní čísla 6
2.7 Komplexní čísla jako polohové vektory 7
2.8 Součet komplexních čísel dle rovnoběžníkového pravidla 7
2.9 Součin $i^2 = -1$ 8
2.10 Součin komplexního čísla s číslem i 8
2.11 Součin komplexních čísel 9
2.12 Znázornění absolutní hodnoty komplexního čísla $z = a + bi$ 14
2.13 Distributivita sčítání vektorů a rotace 18
2.14 Distributivita sčítání vektorů a rotace 18
2.15 Komplexně sdružené číslo a reálná část komplexního čísla 20
2.16 Grafické znázornění identity 2.40 20
2.17 Zadání příkladu 22

3.1 Odvození Heronova vzorce 24
3.2 Osmiúhelník a volba bodu M 27
3.3 Čtyřúhelník 28
3.4 Pythagorejská trojice $\{3,4,5\}$ 31

4.1 Mocniny čísla i 32
4.2 Druhá mocnina komplexních čísel 34
4.3 Binomické rovnice 36
4.4 Zobrazení kružnic při $f(z) = z^2$ 43
4.5 Věta o mezikruží 44
4.6 Obraz jednotkové kružnice při $f(z) = z^5 - 6z^4 + 3z^3 - z^2 + 6z + 1 + i$ 45
4.7 Deformující se křivka $f(z) = z^5 - 6z^4 + 3z^3 - z^2 + 6z + 1 + i$ v závislosti na zmenšující se hodnotě $|z|$ 46
4.8 Deformující se křivka $f(z) = z^2 + z + 1$ v závislosti na zmenšující se hodnotě $|z|$ 46
4.9 Plocha S daná funkcí $f(z) = z^2 + z + 1$ 47
4.10 Plocha S odpovídající funkci $f(z) = z^2 + z + 1$ 47

5.1 Vztah 5.5 pro $n = 6$ 50
5.2 Mocniny komplexního čísla z 54
5.3 Součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti pro $x \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{C}$ 54
5.4 Graf funkce e^z 56
5.5 Šroubovice 56
5.6 Definice goniometrických funkcí 57